Полагая теперь

$$U=\frac{1}{2}f\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{1.11}$$

мы легко убедимся, что

$$X_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad Y_i=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad Z_i=\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Таким образом, функция U определяет все силы притяжения, действующие в системе материальных точек и поэтому называется *силовой функцией системы*.

Силовая функция (1.11) системы свободных материальных точек принципиально отличается от силовой функции (1.9) системы притягивающих центров. В самом деле, функция (1.9) зависит только от трех координат точки P, так как координаты притягивающих центров рассматриваются в формуле (1.9) *как величины постоянные*. Наоборот, функция (1.11) содержит $3n$ координат, которые все являются независимыми переменными, а постоянными величинами в ее выражении являются только массы точек системы.

Но вместе с тем функции (1.9) и (1.11) имеют и некоторые общие черты, главной из которых является *независимость от выбора системы координат*, а также то, что и та и другая функции полностью определяют силовое поле, обусловленное наличием притягивающих масс.

Наконец, что также весьма существенно, каждая из этих функций есть простая алгебраическая функция от прямоугольных декартовых координат притягиваемых точек.

Однако последнее свойство может исчезнуть при переходе к каким-либо другим координатам.

§ 4. Цилиндрические и сферические координаты

В приложениях часто приходится пользоваться вместо прямоугольных координат какими-нибудь другими, часто криволинейными, координатами. Наиболее употребительными являются полярные координаты — цилиндрические и сферические, которые мы здесь и рассмотрим.

1. Введем сначала вместо прямоугольных координат в плоскости xy полярные координаты ρ и v, определяемые формулами преобразования

$$x=\rho\cos v,\qquad y=\rho\sin v,$$

$$\rho^2=x^2+y^2,\qquad v=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

и оставляя третью прямоугольную координату, аппликату, неизмененной.

Тогда взаимные расстояния определятся формулами

$$\Delta_i^2 = \rho^2 + \rho_i'^2 - 2\rho\rho_i' \cos(v - v_i') + (z - z_i')^2,$$
$$\Delta_{ij}^2 = \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j \cos(v_i - v_j) + (z_i - z_j)^2,$$

и силовые функции (1.9) и (1.11) уже не будут алгебраическими относительно полярных углов.

Зная частные производные от U по полярным координатам ρ и v, мы можем найти проекции силы притяжения на некоторые специально выбранные направления.

Действительно, рассмотрим составляющую силы притяжения F_ρ, действующей на точку P, по направлению проекции радиуса-вектора этой точки на плоскость xy и составляющую F_T по направлению, перпендикулярному к этой проекции и лежащему в плоскости xy.

Согласно предыдущему, будем иметь

$$F_\rho = X\cos(\rho, x) + Y\cos(\rho, y) + Z\cos(\rho, z),$$
$$F_T = X\cos(T, x) + Y\cos(T, y) + Z\cos(T, z).$$

Но очевидно, что

$$\cos(\rho, x) = \frac{x}{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial x}, \quad \cos(T, x) = -\frac{y}{\rho} = \rho\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\cos(\rho, y) = \frac{y}{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial y}, \quad \cos(T, y) = \frac{x}{\rho} = \rho\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\cos(\rho, z) = 0, \qquad \cos(T, z) = 0.$$

С другой стороны,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\cos(\rho, x) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial v}\cos(T, x),$$
$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\cos(\rho, y) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial v}\cos(T, y),$$

откуда немедленно получим

$$\left.\begin{aligned} F_\rho &= X\cos(\rho, x) + Y\cos(\rho, y) = \frac{\partial U}{\partial\rho}, \\ F_T &= X\cos(T, x) + Y\cos(T, y) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

Точно так же для случая системы взаимно притягивающихся точек имеем

$$F_{i\rho} = \frac{\partial U}{\partial\rho_i}, \quad F_{iT} = \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial U}{\partial v_i}.$$

2. Рассмотрим теперь вместо прямоугольных декартовых координат полярные сферические r, λ, θ, определяемые формулами преобразования

$$x = r\cos\lambda\sin\theta, \quad y = r\sin\lambda\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + z^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$
$$\lambda = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho}{z},$$

так что r есть радиус-вектор точки, λ — ее долгота и θ — дополнение широты до 90°.

Расстояния между точками выразятся следующим образом:

$$\Delta_i^2 = r^2 + r_i^2 - 2rr_i\cos\gamma_i,$$

где

$$\cos\gamma_i = \cos\theta\cos\theta_i + \sin\theta\sin\theta_i\cos(\lambda - \lambda_i)$$

и, аналогично,

$$\Delta_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_ir_j\cos\gamma_{ij},$$

где

$$\cos\gamma_{ij} = \cos\theta_i\cos\theta_j + \sin\theta_i\sin\theta_j\cos(\lambda_i - \lambda_j).$$

Таким образом, силовая функция, а также составляющие силы притяжения будут функциями сферических координат. Нетрудно выразить составляющие силы через частные производные силовой функции по сферическим координатам. В самом деле, мы имеем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$
$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y},$$
$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Введем теперь в рассмотрение следующие три составляющие силы притяжения F, действующей на точку P: составляющую F_r по радиусу-вектору r точки; составляющую F_T по направлению, перпендикулярному к r и лежащему в плоскости, перпендикулярной к оси Oz и составляющую F_W по направлению, перпендикулярному к r и лежащему в плоскости, проходящей через ось Oz.

Направляющие косинусы этих трех взаимно перпендикулярных направлений в системе $Oxyz$ будут:

$$\cos(r, x) = \frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}; \quad \cos(r, y) = \frac{y}{r} = \frac{\partial r}{\partial y}; \quad \cos(r, z) = \frac{z}{r} = \frac{\partial r}{\partial z};$$

$$\cos(T, x) = -\frac{y}{\rho} = \rho\frac{\partial \lambda}{\partial x}; \quad \cos(T, y) = \frac{x}{\rho} = \rho\frac{\partial \lambda}{\partial y}; \quad \cos(T, z) = 0;$$

$$\cos(W, x) = \frac{xz}{r\rho} = r\frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \cos(W, y) = \frac{yz}{r\rho} = r\frac{\partial \theta}{\partial y};$$

$$\cos(W, z) = -\frac{\rho}{r} = r\frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Используя эти и предыдущие формулы, найдем без труда

$$\left.\begin{aligned} F_r &= X\cos(r, x) + Y\cos(r, y) + Z\cos(r, z) = \frac{\partial U}{\partial r}, \\ F_T &= X\cos(T, x) + Y\cos(T, y) + Z\cos(T, z) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \lambda}, \\ F_W &= X\cos(W, x) + Y\cos(W, y) + Z\cos(W, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}. \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

Для системы свободных материальных точек имеем аналогично

$$F_{ir} = \frac{\partial U}{\partial r_i}, \quad F_{iT} = \frac{1}{r_i\sin\theta_i}\frac{\partial U}{\partial \lambda_i}, \quad F_{iW} = \frac{1}{r_i}\frac{\partial U}{\partial \theta_i}.$$

Нетрудно вычислить частные производные, входящие в формулы (1.12) и (1.13). Для случая системы свободных материальных точек имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_i} = -fm_i \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{\rho_i - \rho_j\cos(v_i - v_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_i} = -fm_i\rho_i \sum_{j=1}^{n}{}' m_j\rho_j \frac{\sin(v_i - v_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = -fm_i \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{r_i - r_j\cos\gamma_{ij}}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = -fm_i r_i\sin\theta_i \sum_{j=1}^{n}{}' m_j r_j\sin\theta_j \frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = -fm_i r_i \sum_{j=1}^{n}{}' m_j r_j \frac{\sin\theta_i\cos\theta_j - \cos\theta_i\sin\theta_j(\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3},$$