§ 5. Притяжение материальной точки материальным телом

До сих пор мы рассматривали силу притяжения, с которой система конечного числа изолированных материальных точек действует на материальную точку единичной массы. Теперь мы будем рассматривать более сложные случаи, когда притягивающая материальная система состоит из бесчисленного множества материальных частиц (материальных точек), т. е. представляет собой непрерывно протяженное материальное тело.

1. Рассмотрим некоторое материальное тело T (твердое, жидкое или газообразное*)), занимающее определенную область пространства D. Эта область D может быть ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями, т. е. может быть как *односвязной*, так и *многосвязной*. В последнем случае тело T будет иметь внутри себя пустые (т. е. не заполненные материей) полости.

Отнесем тело T к некоторой декартовой системе прямоугольных координат $Oxyz$ с началом в произвольно выбранной точке O и с неизменными направлениями осей. Эта система координат может быть, в частности, *неизменно связана* с телом, но в общем случае остается совершенно произвольной.

Пусть $M(x', y', z')$ есть какая-либо точка, принадлежащая области D или ее границе и составляющая, таким образом, часть тела T. Обозначим через $\delta(M)=\delta(x', y', z')$ пространственную плотность материи, образующей рассматриваемое тело, в точке M. Если тело однородно, то $\delta=\text{const}$, а вообще $\delta(M)$ есть некоторая функция точки M, определенная в области D и на ее границе, где по своему смыслу она неотрицательна и однозначна. Мы будем предполагать, сверх того, что функция $\delta(M)$ интегрируема в области D, или даже, что она непрерывна в этой области.

Пусть, далее, $P(x, y, z)$ есть любая точка пространства, в которой помещена материальная точка единичной массы. Наша задача заключается теперь в определении величины и направления силы притяжения, с которой данное материальное тело действует на материальную точку P или, иначе говоря, в определении силового поля, вызываемого (или возбуждаемого) наличием тела.

Чтобы определить силу притяжения тела T на точку P, нужно применить обычный прием интегрального исчисления, разбивая мысленно область D на весьма большое число весьма малых областей, любую из которых будем называть *элементарной областью* или *элементарным объемом*.

*) Независимо от физического состояния тела мы будем предполагать, что его частицы не перемещаются относительно друг друга, т. е. что тело может быть рассматриваемо как абсолютно твердое.

Такое разбиение можно произвести, очевидно, бесчисленным множеством способов, например, воображая три семейства плоскостей соответственно параллельных координатным плоскостям. Тогда элементарные области будут прямоугольными параллелепипедами с ребрами, параллельными координатным осям.

Пусть M — какая-либо точка, принадлежащая элементарной области, объем которой обозначим через $d\tau$. Вообразим, что элементарный объем заполнен однородной материей с плотностью $\delta(x', y', z')$. Тогда

$$dm = \delta\, d\tau$$

будем называть элементом массы тела T.

Заметим, что если элементарными областями являются параллелепипеды, то

$$d\tau = dx'\, dy'\, dz'.$$

Так как элементарные области предполагаются имеющими весьма малый объем и плотность $\delta(M)$ всюду конечна в области, занимаемой телом T, то элемент массы можно рассматривать как материальную точку, помещенную в точке M и обладающую массой dm. Эта материальная точка притягивает материальную точку P единичной массы с силой, проекции которой на координатные оси будут соответственно

$$f\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm, \quad f\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm, \quad f\frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm.$$

Заменяя каждый элементарный объем подобной же материальной точкой, мы получим систему конечного (но очень большого!) числа фиксированных материальных точек, каждая из которых притягивает точку P. Проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку P, согласно § 3 будут суммами весьма большого числа слагаемых такого же вида.

Переходя затем к пределу в предположении, что число элементарных областей неограниченно возрастает, а объем каждой элементарной области неограниченно уменьшается, согласно принципам интегрального исчисления мы перейдем от конечных сумм к определенным интегралам, взятым по всей области D.

Обозначая полученные таким образом проекции силы притяжения тела T на точку P через $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z) &= f\iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(x'-x)}{\Delta^3}\,d\tau, \\ Y(x, y, z) &= f\iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(y'-y)}{\Delta^3}\,d\tau, \\ Z(x, y, z) &= f\iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(z'-z)}{\Delta^3}\,d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

В последующем мы часто будем писать эти и подобные им формулы более кратко, например, в виде

$$X = f \iiint_{(D)} \frac{\delta(x'-x)}{\Delta^3} d\tau,$$

или даже, заменяя три знака интеграла одним, следующим образом:

$$X = f \int_{(D)} \frac{x'-x}{\Delta^3} dm.$$

Тройные интегралы в этих формулах распространены на всю область D, занимаемую притягивающей материей, и для их вычисления необходимо знать форму тела T и его положение в системе $Oxyz$. Координаты притягиваемой точки P остаются постоянными в процессе интегрирования, а поэтому составляющие силы притяжения суть некоторые функции точки P.

2. Рассмотрим теперь, по аналогии с предыдущим, функцию от координат точки P, определяемую формулой

$$U(x, y, z) = f \iiint_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\, d\tau}{\Delta} = f \int_{(D)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{1.15}$$

где областью интегрирования является та же область D, что и в формулах (1.14).

Предположим сначала, что точка P является внешней для тела T, т. е. не составляет часть его массы.

Далее, допустим, что область D конечна и что функция $\delta(M)$ непрерывна всюду в области D. Тогда подынтегральная функция в формуле (1.15) непрерывна всюду (по условию Δ не обращается в нуль нигде в области D) в области интегрирования и интеграл является собственным.

Следовательно, при дифференцировании функции U по x, y, z мы можем применить правило дифференцирования определенного интеграла по параметру, каковым и является соответствующая координата точки P, входящая под знаком интеграла в расстояние Δ, определяемое формулой

$$\Delta = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Применяя теперь правило дифференцирования интеграла, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f \frac{\partial}{\partial x} \int_{(D)} \frac{dm}{\Delta} = f \int_{(D)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right) dm = f \int_{(D)} \frac{x'-x}{\Delta^3} dm = X,$$

так что будем иметь

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.16}$$

т. е. составляющие силы притяжения, действующей на точку P, равны частным производным от силовой функции тела по координатам этой точки. Очевидно, что, как и ранее, составляющая силы притяжения тела по любому направлению $L(\alpha', \beta', \gamma')$ будет равна производной от функции точки U по направлению L и определится формулой

$$F_L = \frac{\partial U}{\partial L} = \alpha' \frac{\partial U}{\partial x} + \beta' \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.16'}$$

Следует отметить, что справедливость формул (1.16) и (1.16′) установлена пока только для случая, когда точка P является внешней точкой для тела T. Но в следующей главе дополнительно будет доказано, что эти формулы остаются справедливыми и для того случая, когда точка P находится внутри тела, так что эти формулы пригодны во всем пространстве.

Итак, функция U полностью определяет величину и направление силы притяжения, действующей на точку P и вызываемой присутствием тела T.

Поэтому будем называть функцию U, так же как и в предыдущих параграфах, силовой функцией тела T, или функцией сил, или (хотя и не совсем правильно!) гравитационным потенциалом тела T, или, просто, потенциалом тела.

3. Выражение силовой функции, так же как и составляющих силы притяжения, зависит от формы тела, от его внутреннего строения, а также от положения тела относительно избранной системы координат.

Действительно, внутреннее строение тела определяется заданием функции $\delta(x', y', z')$, явно входящей под знак интеграла, а форма и положение тела определяют область интегрирования D, т. е., в конечном счете, значения пределов определенного интеграла в формулах (1.14) и (1.15).

Положение и ориентация тела относительно осей координат могут быть определены заданием координат какой-либо выбранной точки тела и тремя эйлеровыми углами, определяющими ориентацию собственной системы осей, неизменно связанных с телом, с началом в упомянутой точке. Поэтому и функция U и составляющие силы притяжения X, Y, Z, являясь функциями от координат x, y, z точки P, зависят еще, вообще, от шести параметров, определяющих положение и ориентацию тела в системе координат $Oxyz$.

Заметим, что за упомянутые параметры можно взять (но не обязательно!) координаты центра инерции тела и эйлеровы углы главных центральных осей инерции.

Если, как это часто случается, за систему $Oxyz$ принята собственная система координат, то выражение силовой функции не содержит параметров положения и ориентации и зависит только от параметров, определяющих форму и строение тела (кроме, само собой разумеется, координат притягиваемой точки P).

Для конкретного определения силового поля, возбуждаемого телом T, нужно вычислить или три интеграла (1.14) или один-единственный интеграл (1.15). Если бы эти интегралы всегда вычислялись в конечном (и притом удобном для пользования) виде, то все было бы очень просто, и области науки, называемой *теорией притяжения* или *теорией потенциала*, заведомо не существовало бы.

Но интегралы (1.14) и (1.15) вычисляются в элементарных функциях только в некоторых исключительных случаях, а вообще оказываются совершенно невычисляемыми. Поэтому возникает необходимость изучения свойств и характера функции, определяемой таким невычисляемым интегралом, а также разработки методов, дающих ее приближенное выражение и способов для ее вычисления.

Решение этих задач и составляет предмет теории притяжения, основы которой излагаются в первой части книги.

Сложность выражения для силовой функции, обусловленная необходимостью выполнения трех последовательных интегрирований, заставляет искать случаи, в которых число интегрирований было бы меньше трех. Такие случаи действительно существуют. Это, например, имеет место, когда $\delta = \text{const}$, т. е. когда тело T однородно. Тогда, как будет показано в следующей главе, силовая функция и составляющие силы притяжения выражаются не тройными, а двойными интегралами, что представляет все же некоторое упрощение.

Реальные тела природы, конечно, строго говоря всегда неоднородны. Однако во многих случаях эта неоднородность оказывается очень слабой, так что рассматриваемое тело можно с достаточной степенью точности считать однородным, что облегчает задачу.

Кроме того, иногда рассматриваемое тело таково, что одно или даже два из трех его измерений весьма малы по сравнению с третьим, что опять-таки позволяет заменить тело более простой моделью и опять уменьшить число необходимых интегрирований.

§ 6. Притяжение материальной точки материальной поверхностью и материальной линией

1. Рассмотрим случаи, когда тройной интеграл превращается в двойной, взятый по некоторой поверхности, или в обыкновенный, криволинейный. Это будет иметь место, когда данное тело