содержит параметров положения и ориентации и зависит только от параметров, определяющих форму и строение тела (кроме, само собой разумеется, координат притягиваемой точки P).

Для конкретного определения силового поля, возбуждаемого телом T, нужно вычислить или три интеграла (1.14) или один-единственный интеграл (1.15). Если бы эти интегралы всегда вычислялись в конечном (и притом удобном для пользования) виде, то все было бы очень просто, и области науки, называемой **теорией притяжения** или **теорией потенциала**, заведомо не существовало бы.

Но интегралы (1.14) и (1.15) вычисляются в элементарных функциях только в некоторых исключительных случаях, а вообще оказываются совершенно невычисляемыми. Поэтому возникает необходимость изучения свойств и характера функции, определяемой таким невычисляемым интегралом, а также разработки методов, дающих ее приближенное выражение и способов для ее вычисления.

Решение этих задач и составляет предмет теории притяжения, основы которой излагаются в первой части книги.

Сложность выражения для силовой функции, обусловленная необходимостью выполнения трех последовательных интегрирований, заставляет искать случаи, в которых число интегрирований было бы меньше трех. Такие случаи действительно существуют. Это, например, имеет место, когда $\delta = \mathrm{const}$, т. е. когда тело T однородно. Тогда, как будет показано в следующей главе, силовая функция и составляющие силы притяжения выражаются не тройными, а двойными интегралами, что представляет все же некоторое упрощение.

Реальные тела природы, конечно, строго говоря всегда неоднородны. Однако во многих случаях эта неоднородность оказывается очень слабой, так что рассматриваемое тело можно с достаточной степенью точности считать однородным, что облегчает задачу.

Кроме того, иногда рассматриваемое тело таково, что одно или даже два из трех его измерений весьма малы по сравнению с третьим, что опять-таки позволяет заменить тело более простой моделью и опять уменьшить число необходимых интегрирований.

§ 6. Притяжение материальной точки материальной поверхностью и материальной линией

1. Рассмотрим случаи, когда тройной интеграл превращается в двойной, взятый по некоторой поверхности, или в обыкновенный, криволинейный. Это будет иметь место, когда данное тело

представляет собой материальную поверхность, называемую **простым слоем**, или же материальную линию.

Рассмотрим сначала первый случай. Вообразим, что одно из трех измерений тела T весьма мало́ по сравнению с двумя другими, так что тело представляет собой нечто вроде большого, но очень тонкого листа или слоя. Тогда в ряде задач оказывается возможным пренебречь малой толщиной листа и рассматривать тело как идеальную (геометрическую) поверхность, по которой как бы размазана бесконечно тонким слоем притягивающая масса. Пусть дана такая поверхность S (замкнутая или не замкнутая, безразлично), в каждой точке которой определена некоторая функция точки $\delta(M)=\delta(x', y', z')$, которую будем называть поверхностной плотностью простого слоя. Так как точка $M(x', y', z')$ принадлежит некоторой поверхности, то три координаты x', y', z' связаны уравнением этой поверхности вида

$$\Phi(x', y', z')=0 \quad \text{или} \quad z'=\Phi(x', y'),$$

или выражаются в функции двух независимых переменных u' и v' (криволинейные координаты на поверхности), так что

$$x'=\varphi(u', v'), \qquad y'=\psi(u', v'), \qquad z'=\chi(u', v').$$

Пусть точка M является «центром» весьма малой части поверхности S, которую будем называть **элементом площади** поверхности и которую обозначим через $d\sigma$. Величину $\delta\, d\sigma$ естественно назвать элементом массы нашей материальной поверхности и положить

$$dm=\delta(M)\, d\sigma.$$

Рассматривая dm как массу материальной точки, помещенной в точке M поверхности, мы, подобно тому как это было сделано выше для трехмерного тела, получим проекции силы притяжения материальной поверхности или простого слоя T, действующей на любую точку пространства $P(x, y, z)$ в виде

$$X=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\,(x'-x)\,d\sigma}{\Delta^3}=f\int\limits_{(S)}\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm,$$

$$Y=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\,(y'-y)\,d\sigma}{\Delta^3}=f\int\limits_{(S)}\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm,$$

$$Z=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\,(z'-z)\,d\sigma}{\Delta^3}=f\int\limits_{(S)}\frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm,$$

где интегрирование распространено на всю поверхность S, несущую на себе притягивающую материю. Вводя опять функцию

$$U(x, y, z)=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\,(M)\,d\sigma}{\Delta}=f\int\limits_{(S)}\frac{dm}{\Delta}\,, \tag{1.17}$$

мы покажем, совершенно так же как и выше, что если точка P не лежит на поверхности S, то будут справедливы формулы

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z},\quad F_L=\frac{\partial U}{\partial L}.$$

Поэтому функцию U, определенную формулой (1.17), назовем *силовой функцией материальной поверхности* S или *силовой функцией простого слоя* T, или, наконец, *потенциалом простого слоя, лежащего на поверхности* S.

Потенциалом простого слоя приходится пользоваться в различных областях знания, в частности, в астрономии и в гравиметрии.

Действительно, известно, например, что кольца Сатурна имеют крайне незначительную толщину (ее оценивают в 15 *км*, в то время как наружный диаметр кольца составляет около 275 000 *км*). Поэтому в небесной механике при изучении движений близких спутников Сатурна, когда необходимо учитывать и притягивающее влияние кольца, последнее можно рассматривать с достаточной степенью точности как плоское материальное круглое кольцо и его притяжение определять силовой функцией вида (1.17).

Точно так же, изучая гравитационное поле нашей Галактики и учитывая малость ее толщины по сравнению с ее диаметром, можно моделировать эту галактику плоским круглым диском и опять воспользоваться потенциалом простого слоя типа (1.17).

Наконец, если в гравиметрии рассматривается рудный пласт, толщина которого мала по сравнению с длиной и шириной, то часто бывает возможно пренебречь этой малой толщиной и рассчитывать притяжение пласта как притяжение куска материальной поверхности, потенциал которой определяется формулой (1.17).

Приведенные примеры показывают, что чисто математическое понятие простого слоя, или материальной поверхности, имеет реальный смысл и с успехом может быть использовано в различных приложениях.

2. Теперь рассмотрим второй случай, когда притягивающее тело представляет собой некоторую материальную линию.

Пусть в системе $Oxyz$ дана некоторая математическая пространственная линия C или некоторый кусок такой линии, и пусть в каждой точке $M(x', y', z')$ линии C определена некоторая функция точки $\delta(M)=\delta(x', y', z')$, которую будем называть линейной плотностью линии. Так как точка M принадлежит пространственной линии, то три ее координаты связаны уравнениями этой линии, которые можно написать в виде

$$\Phi(x', y', z')=0,\quad \Psi(x', y', z')=0,$$

или, в параметрической форме,

$$x' = \varphi(\tau), \quad y' = \psi(\tau), \quad z' = \chi(\tau),$$

где τ — криволинейная координата на линии, за которую мы можем принять длину дуги s, отсчитываемую от некоторой точки линии M_0, принятой за начальную.

Вообразим, что точка M есть центр весьма малой дуги линии, которую будем называть элементом дуги и которую обозначим через ds. Величину $\delta\, ds$ естественно опять-таки назвать элементом притягивающей массы материальной линии и положить

$$dm = \delta(M)\, ds.$$

Рассматривая опять dm как массу материальной точки, помещенной в точке M линии, мы, совершенно так же как и выше, составим выражения для составляющих силы притяжения материальной линии, действующей на любую точку $P(x, y, z)$, в виде

$$X = f \int\limits_{(C)} \frac{x' - x}{\Delta^3}\, dm, \quad Y = f \int\limits_{(C)} \frac{y' - y}{\Delta^3}\, dm, \quad Z = f \int\limits_{(C)} \frac{z' - z}{\Delta^3}\, dm,$$

где интегрирование распространено на всю линию C, занятую притягивающей материей. Теперь, так же как и выше, введем в рассмотрение функцию

$$U(x, y, z) = f \int\limits_{(C)} \frac{dm}{\Delta} \tag{1.18}$$

и покажем, опять так же как и ранее, что если точка P не принадлежит линии C, то имеем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad F_L = \frac{\partial U}{\partial L}.$$

Эту функцию U назовем поэтому силовой функцией (или потенциалом) материальной линии C.

Понятие материальной линии кажется сначала также чисто математическим, абстрактным понятием, так как реальные тела природы заведомо имеют три, а не одно, измерения. Однако часто приходится рассматривать тела, два измерения которых весьма малы по сравнению с третьим. Таковы, например, длинные тонкие стержни или длинные куски тонкой проволоки и т. п. В гравиметрии можно встретить рудные образования в виде длинных жил, поперечные сечения которых весьма малы по сравнению с длиной. Каждое такое тело, имеющее вид длинной «кишки», начиненной материей, можно приближенно рассматривать как материальную линию и определять потенциал такого тела с помощью однократного криволинейного интеграла, что позволяет значительно упростить рассматриваемую задачу.

Силовой функцией материальной линии приходится пользоваться также и в небесной механике при изучении движений небесных тел, как естественных, так и искусственных.

Так, в методе Гаусса вычисления вековых возмущений от планет, движущихся по эллиптическим или круговым орбитам, показывается, что действие притяжения такой движущейся планеты иногда можно заменить действием притяжения неподвижного материального эллиптического или кругового кольца, сконструированного надлежащим образом *).

Наконец, космическую ракету, имеющую вид длинного цилиндра, можно уподобить при изучении ее вращательного движения вокруг ее центра масс — материальному отрезку прямой линии и определить ее потенциал формулой типа (1.18) **).

§ 7. Дополнительные замечания

1. Мы рассмотрели три основные понятия теории притяжения, а именно: силовую функцию трехмерного тела, или, иначе, объемный потенциал; силовую функцию материальной поверхности, или потенциал простого слоя, и силовую функцию материальной линии, или линейный потенциал. Все эти три силовые функции, определяемые соответственно формулами (1.15), (1.17) и (1.18), можно представить одной-единственной формулой

$$U=f\int\limits_{(T)}\frac{dm}{\Delta}, \tag{1.19}$$

где знак интеграла показывает, что интегрирование распространено на всю притягивающую массу, а

$$\Delta=\overline{PM}=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

есть расстояние притягиваемой точки P единичной массы от притягивающего элемента массы, помещенного в точке M. Обозначая элемент области интегрирования (т. е. элемент объема, или элемент площади поверхности, или элемент дуги кривой) через dT, мы будем иметь во всех случаях

$$dm=\delta(M)\,dT.$$

Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, также можно записать во всех трех случаях одинаковым

*) М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.

**) Г. Н. Дубошин, Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел, Астрон. журн., т. XXXVI, 1959.