тела с помощью однократного криволинейного интеграла, что позволяет значительно упростить рассматриваемую задачу.

Силовой функцией материальной линии приходится пользоваться также и в небесной механике при изучении движений небесных тел, как естественных, так и искусственных.

Так, в методе Гаусса вычисления вековых возмущений от планет, движущихся по эллиптическим или круговым орбитам, показывается, что действие притяжения такой движущейся планеты иногда можно заменить действием притяжения неподвижного материального эллиптического или кругового кольца, сконструированного надлежащим образом *).

Наконец, космическую ракету, имеющую вид длинного цилиндра, можно уподобить при изучении ее вращательного движения вокруг ее центра масс — материальному отрезку прямой линии и определить ее потенциал формулой типа (1.18) **).

§ 7. Дополнительные замечания

1. Мы рассмотрели три основные понятия теории притяжения, а именно: силовую функцию трехмерного тела, или, иначе, объемный потенциал; силовую функцию материальной поверхности, или потенциал простого слоя, и силовую функцию материальной линии, или линейный потенциал. Все эти три силовые функции, определяемые соответственно формулами (1.15), (1.17) и (1.18), можно представить одной-единственной формулой

$$U = f \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{1.19}$$

где знак интеграла показывает, что интегрирование распространено на всю притягивающую массу, а

$$\Delta = \overline{PM} = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

есть расстояние притягиваемой точки P единичной массы от притягивающего элемента массы, помещенного в точке M. Обозначая элемент области интегрирования (т. е. элемент объема, или элемент площади поверхности, или элемент дуги кривой) через dT, мы будем иметь во всех случаях

$$dm = \delta(M)\, dT.$$

Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, также можно записать во всех трех случаях одинаковым

*) М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.

**) Г. Н. Дубошин, Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел, Астрон. журн., т. XXXVI, 1959.

образом:

$$X = f\int\limits_{(T)}\frac{(x'-x)\,dm}{\Delta^3},\quad Y = f\int\limits_{(T)}\frac{(y'-y)\,dm}{\Delta^3},\quad Z = f\int\limits_{(T)}\frac{(z'-z)\,dm}{\Delta^3}. \tag{1.20}$$

Если нужно найти составляющую силы притяжения по какому-либо другому направлению, не совпадающему с направлениями координатных осей, то мы можем воспользоваться приведенными выше формулами (1.4), (1.12) и (1.13). Входящие в последние две формулы частные производные без труда могут быть вычислены, в случае, когда точка P не составляет часть притягивающей массы, при помощи правила дифференцирования собственного определенного интеграла по параметру.

Легко проверить, что для этих производных получаются следующие формулы:

в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -f\int\limits_{(T)}\frac{\rho-\rho'\cos(v-v')}{\Delta^3}\,dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -f\rho\int\limits_{(T)}\frac{\rho'\sin(v-v')}{\Delta^3}\,dm,$$

где

$$\Delta = \sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(v-v')+(z-z')^2};$$

в сферической системе координат:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -f\int\limits_{(T)}\frac{r-r'\cos\gamma}{\Delta^3}\,dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = -fr\sin\theta\int\limits_{(T)}\frac{r'\sin\theta'\sin(\lambda-\lambda')}{\Delta^3}\,dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -fr\int\limits_{(T)}\frac{r'\,[\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda')]}{\Delta^3}\,dm,$$

где

$$\Delta = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}$$

и

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda').$$

2. Элемент массы равен произведению плотности (объемной, поверхностной или линейной) на элемент области интегрирования, который также должен быть выражен в соответствующих координатах. Например, элемент объема $d\tau$ в цилиндрических координатах выражается формулой

$$d\tau = \rho'\,d\rho'\,dv'\,dz',$$

а в сферических координатах имеем

$$d\tau = r'^2 \sin\theta' \, dr' \, d\lambda' \, d\theta'.$$

Нужно еще всегда иметь в виду, что выражения для U, X, Y, Z, определяемые формулами (1.19) и (1.20), являясь функциями координат точки P, зависят также от величин, определяющих форму и физическое строение притягивающей массы, а также от параметров, определяющих ее положение и ориентацию относительно осей $Oxyz$.

Отметим еще, что полная масса притягивающей материи во всех случаях может быть определена одной и той же формулой

$$m = \int\limits_{(T)} \delta \, dT,$$

где интеграл берется по всей области, занятой притягивающим веществом.

Если масса притягиваемой точки не равна единице, как мы до сих пор предполагали, то в формулы (1.19) и (1.20) нужно ввести дополнительный множитель и писать эти формулы в следующем виде:

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{1.19'}$$

и соответственно

$$X = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(x'-x)\,dm}{\Delta^3}, \quad Y = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(y'-y)\,dm}{\Delta^3}, \quad Z = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(z'-z)\,dm}{\Delta^3}. \tag{1.20'}$$

§ 8. Потенциал двойного слоя

1. Перейдем теперь к рассмотрению понятия, которое не имеет непосредственного отношения к теории притяжения, но является удобным вспомогательным математическим инструментом.

Это — понятие *потенциала двойного слоя*, которое играет важную роль в теоретической физике, но для рассматриваемой здесь теории притяжения является только некоторым чисто математическим понятием.

Сделаем прежде всего одно замечание. Рассматривая в § 6 понятие простого слоя, мы предполагали, разумеется, что поверхностная плотность, или плотность простого слоя, есть функция заведомо неотрицательная.

Здесь, наоборот, мы будем рассматривать простые слои, плотности которых могут иметь любые вещественные значения, как положительные, так и отрицательные.