а в сферических координатах имеем

$$d\tau = r'^2 \sin\theta' \, dr' \, d\lambda' \, d\theta'.$$

Нужно еще всегда иметь в виду, что выражения для U, X, Y, Z, определяемые формулами (1.19) и (1.20), являясь функциями координат точки P, зависят также от величин, определяющих форму и физическое строение притягивающей массы, а также от параметров, определяющих ее положение и ориентацию относительно осей $Oxyz$.

Отметим еще, что полная масса притягивающей материи во всех случаях может быть определена одной и той же формулой

$$m = \int\limits_{(T)} \delta \, dT,$$

где интеграл берется по всей области, занятой притягивающим веществом.

Если масса притягиваемой точки не равна единице, как мы до сих пор предполагали, то в формулы (1.19) и (1.20) нужно ввести дополнительный множитель и писать эти формулы в следующем виде:

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{1.19'}$$

и соответственно

$$X = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(x'-x)\,dm}{\Delta^3}, \quad Y = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(y'-y)\,dm}{\Delta^3}, \quad Z = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(z'-z)\,dm}{\Delta^3}. \tag{1.20'}$$

§ 8. Потенциал двойного слоя

1. Перейдем теперь к рассмотрению понятия, которое не имеет непосредственного отношения к теории притяжения, но является удобным вспомогательным математическим инструментом.

Это — понятие *потенциала двойного слоя*, которое играет важную роль в теоретической физике, но для рассматриваемой здесь теории притяжения является только некоторым чисто математическим понятием.

Сделаем прежде всего одно замечание. Рассматривая в § 6 понятие простого слоя, мы предполагали, разумеется, что поверхностная плотность, или плотность простого слоя, есть функция заведомо неотрицательная.

Здесь, наоборот, мы будем рассматривать простые слои, плотности которых могут иметь любые вещественные значения, как положительные, так и отрицательные.

Пусть мы имеем некоторую поверхность или кусок поверхности S, на которой распределен простой слой с плотностью δ, удовлетворяющей принятому условию.

Предполагая поверхность S гладкой*), отложим на каждой нормали к этой поверхности в одну и ту же определенную сторону отрезок постоянной длины ε. Геометрическое место концов этих нормалей образует вторую поверхность S', «параллельную» поверхности S. Пусть M' есть точка поверхности S', лежащая на нормали, проведенной в точке M поверхности S.

Распределим теперь на поверхности S' простой слой с плотностью δ' так, чтобы масса элемента поверхности S' с центром в M' была равна по величине, но противоположна по знаку массе соответствующего элемента поверхности S с центром в M.

Пусть P — произвольная точка пространства, а $U(P)$ и $U'(P)$ — потенциалы двух простых слоев, лежащих соответственно на S и S'.

Потенциалом двойного слоя, распределенного на поверхности S, назовем предел, к которому стремится при $\varepsilon \to 0$ сумма $U+U'$, при условии, что $\delta \cdot \varepsilon$ стремится к определенному, конечному, не равному вообще нулю пределу.

Обозначая потенциал двойного слоя**) на точку P через $W(P)$, имеем, по определению,

$$W = \lim_{\varepsilon \to 0} (U + U').$$

Пусть x', y', z' суть координаты текущей точки M поверхности S и x'_ε, y'_ε, z'_ε — координаты соответствующей точки M' поверхности S'.

Мы имеем

$$U(P) = f \iint_{(S)} \frac{dm}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

---

*) «Гладким» куском поверхности или «гладкой» поверхностью мы будем называть для сокращения такую часть поверхности, в каждой точке которой существует определенная касательная плоскость (а следовательно, и определенная нормаль), непрерывно изменяющая свое положение при непрерывном перемещении точки по поверхности. См., например, В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, Гостехиздат, 1957.

**) Таким образом, «двойной слой» представляет собой совокупность двух простых слоев, плотности которых равны по величине и противоположны по знаку, и которые распределены соответственно с двух сторон одной и той же поверхности S так, что каждая ее точка является одновременно точкой и той и другой стороны.

и соответственно

$$U'(P) = f \iint_{(S')} \frac{dm'}{\Delta'},$$

где

$$\Delta' = \sqrt{(x - x'_\varepsilon)^2 + (y - y'_\varepsilon)^2 + (z - z'_\varepsilon)^2},$$

причем по условию

$$dm = \delta' \, d\sigma' = -dm = -\delta \, d\sigma.$$

Так как каждой текущей точке M' поверхности S' соответствует текущая точка M на S, то в выражении для U' интегрирование можно перенести с S' на S, вследствие чего можем написать

$$U + U' = f \iint_{(S)} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta'} \right) \delta \, d\sigma.$$

Пусть α', β', γ' суть направляющие косинусы выбранного направления нормали к поверхности S. Тогда для координат точки M' имеем

$$x'_\varepsilon = x' + \alpha'\varepsilon, \quad y'_\varepsilon = y' + \beta'\varepsilon, \quad z'_\varepsilon = z' + \gamma'\varepsilon,$$

так что получим

$$\frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{\sqrt{(x - x' - \alpha'\varepsilon)^2 + (y - y' - \beta'\varepsilon)^2 + (z - z' - \gamma'\varepsilon)^2}}.$$

Разлагая эту функцию в ряд Тейлора по степеням малой величины ε, найдем

$$\frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{\Delta} + \varepsilon \left[\alpha' \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{\Delta} \right) + \beta' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{\Delta} \right) + \gamma' \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{\Delta} \right) \right] + \ldots,$$

и, следовательно,

$$U + U' = -f \iint_{(S)} \varepsilon\delta \left[\alpha' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z'} \right] d\sigma + \ldots,$$

где невыписанные члены имеют порядок выше первого относительно малого ε. Переходя теперь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$W(x, y, z) = -f \iint_{(S)} \left[\alpha' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z'} \right] \mu \, d\sigma, \qquad (1.21)$$

где

$$\mu(M) = \mu(x', y', z') = \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon\delta)$$

по условию есть конечная величина, называемая **плотностью двойного слоя**.

2. Для выражения потенциала двойного слоя можно получить и другие формулы. Преобразуем с этой целью подынтегральное выражение в формуле (1.21) следующим образом:

$$\alpha' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z'} = -\frac{1}{\Delta^2}\left(\alpha' \frac{x'-x}{\Delta} + \beta' \frac{y'-y}{\Delta} + \gamma' \frac{z'-z}{\Delta}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\Delta^2}(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = -\frac{\cos\varphi}{\Delta^2},$$

где φ есть угол между направлением нормали к S и направлением $\overrightarrow{PM}$, идущим от притягиваемой точки к текущей точке поверхности S, на которой распределен двойной слой.

Теперь выражение потенциала двойного слоя представится в следующем виде:

$$W(P) = f \iint_{(S)} \mu \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma. \tag{1.22}$$

Далее, замечая, что величина, стоящая в скобках под знаком интеграла в формуле (1.21), есть производная от обратного расстояния Δ^{-1} по направлению нормали к S, можем написать

$$W = -f \iint_{(S)} \mu \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial n} d\sigma. \tag{1.23}$$

Наконец, так как

$$\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} = -\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x}, \ \ldots$$

и α', β', γ' не зависят от координат точки P, то имеем

$$\alpha' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z'} = -\frac{\partial \frac{\alpha'}{\Delta}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\beta'}{\Delta}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\gamma'}{\Delta}}{\partial z}.$$

Предполагая, что точка P не лежит на S и что функция $\mu(M)$ непрерывна на этой поверхности, мы можем из (1.21) вывести следующую формулу:

$$W(P) = f \iint_{(S)} \left[\frac{\partial \frac{\alpha'}{\Delta}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\beta'}{\Delta}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\gamma'}{\Delta}}{\partial z}\right] \mu\, d\sigma =$$
$$= f\left\{\frac{\partial}{\partial x} \iint_{(S)} \frac{\alpha'\mu}{\Delta} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \iint_{(S)} \frac{\beta'\mu}{\Delta} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \iint_{(S)} \frac{\gamma'\mu}{\Delta} d\sigma\right\}.$$

Но интегралы, стоящие под знаками частных производных, можно рассматривать, если угодно, как потенциалы трех простых слоев соответственно с плотностями $\alpha'\mu$, $\beta'\mu$, $\gamma'\mu$, лежащих на одной и той же поверхности S. Обозначая эти потенциалы соответственно через U_1, U_2, U_3, мы можем написать

$$W = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}. \tag{1.24}$$

§ 9. Притяжение материального тела материальной точкой

В §§ 5, 6 мы рассматривали силу притяжения, с которой некоторое материальное тело (трехмерное, двумерное или одномерное) действует на материальную точку P единичной, или любой, массы. Теперь мы будем рассматривать более сложный, но более близкий к действительности случай взаимного притяжения двух произвольных материальных тел.

1. Это рассмотрение начнем со случая, который представляет собой, так сказать, «обращение» случая, которым мы занимались ранее, и который получится, если мы обменяем роли точки P и тела T. Иными словами, будем рассматривать теперь точку P как притягивающую, а произвольно расположенное относительно системы координат $Oxyz$ тело T как притягиваемое.

Непосредственно кажется очевидным, что силовая функция, введенная в §§ 5, 6, при таком обмене ролей не изменится, и поэтому может рассматриваться как взаимная силовая функция (взаимный потенциал) тела и материальной точки. Отсюда следует, что если бы мы интересовались только силовой функцией притяжения, то добавить к §§ 5, 6 было бы почти нечего. Однако возникает вопрос, как определить величину и направление силы, действующей на тело со стороны материальной точки, а так же как найти неизбежно возникающий здесь момент силы притяжения относительно какой-либо заданной точки. Поэтому приходится рассмотреть поставленный вопрос более обстоятельно.

Пусть дана в системе $Oxyz$ точка $P(x, y, z)$, в которой сосредоточена притягивающая точечная масса μ.

Пусть задано также некоторое материальное тело T (или материальная поверхность, или материальная линия) с непрерывной (или хотя бы только интегрируемой) плотностью δ (объемной, поверхностной или линейной). Чтобы определить положение и ориентацию тела T относительно осей $Oxyz$, выберем некоторую точку G, неизменно связанную с телом, координаты которой обозначим через ξ, η, ζ и которую будем называть «центром приведения». Точка G может быть выбрана совершенно произвольно и может даже не принадлежать