Но интегралы, стоящие под знаками частных производных, можно рассматривать, если угодно, как потенциалы трех простых слоев соответственно с плотностями $\alpha'\mu$, $\beta'\mu$, $\gamma'\mu$, лежащих на одной и той же поверхности S. Обозначая эти потенциалы соответственно через U_1, U_2, U_3, мы можем написать

$$W = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}. \tag{1.24}$$

§ 9. Притяжение материального тела материальной точкой

В §§ 5, 6 мы рассматривали силу притяжения, с которой некоторое материальное тело (трехмерное, двумерное или одномерное) действует на материальную точку P единичной, или любой, массы. Теперь мы будем рассматривать более сложный, но более близкий к действительности случай взаимного притяжения двух произвольных материальных тел.

1. Это рассмотрение начнем со случая, который представляет собой, так сказать, «обращение» случая, которым мы занимались ранее, и который получится, если мы обменяем роли точки P и тела T. Иными словами, будем рассматривать теперь точку P как притягивающую, а произвольно расположенное относительно системы координат $Oxyz$ тело T как притягиваемое.

Непосредственно кажется очевидным, что силовая функция, введенная в §§ 5, 6, при таком обмене ролей не изменится, и поэтому может рассматриваться как взаимная силовая функция (взаимный потенциал) тела и материальной точки. Отсюда следует, что если бы мы интересовались только силовой функцией притяжения, то добавить к §§ 5, 6 было бы почти нечего. Однако возникает вопрос, как определить величину и направление силы, действующей на тело со стороны материальной точки, а так же как найти неизбежно возникающий здесь момент силы притяжения относительно какой-либо заданной точки. Поэтому приходится рассмотреть поставленный вопрос более обстоятельно.

Пусть дана в системе $Oxyz$ точка $P(x, y, z)$, в которой сосредоточена притягивающая точечная масса μ.

Пусть задано также некоторое материальное тело T (или материальная поверхность, или материальная линия) с непрерывной (или хотя бы только интегрируемой) плотностью δ (объемной, поверхностной или линейной). Чтобы определить положение и ориентацию тела T относительно осей $Oxyz$, выберем некоторую точку G, неизменно связанную с телом, координаты которой обозначим через ξ, η, ζ и которую будем называть «центром приведения». Точка G может быть выбрана совершенно произвольно и может даже не принадлежать телу T, но, во всяком случае, должна быть неизменно с ним связана *).

В частности, точка G может быть центром инерции (центром масс) тела T, а тогда ее координаты определяются известными формулами

$$\xi = \frac{1}{m} \int\limits_{(T)} x'\,dm, \quad \eta = \frac{1}{m} \int\limits_{(T)} y'\,dm, \quad \zeta = \frac{1}{m} \int\limits_{(T)} z'\,dm, \tag{1.25}$$

где интегрирование распространено на всю массу тела.

Вообразим теперь прямоугольную декартову систему координат с началом в точке G, неизменнно связанную с телом T.

Оси $G\xi'$, $G\eta'$, $G\zeta'$ этой «собственной» системы координат также можно выбрать совершенно произвольно, лишь бы они были жестко связаны с телом.

В частности, за эти оси можно взять направления осей эллипсоида инерции тела, соответствующего точке G, а если эта точка есть центр инерции, то за оси собственной системы координат можно взять направления главных центральных осей инерции тела, которые однозначно определяются формой и структурой тела T.

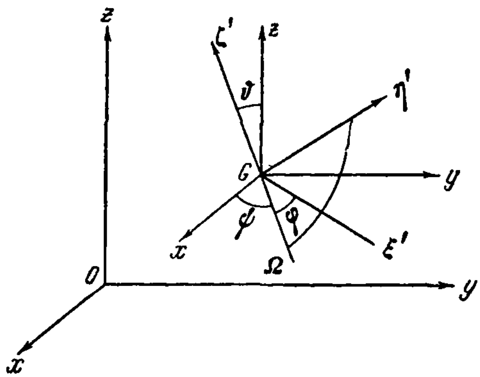

Рис. 1.

Ориентация тела T в системе $Oxyz$ определяется ориентацией собственной системы координат $G\xi'\eta'\zeta'$ относительно системы $Oxyz$, а ориентация собственной системы однозначно определяется тремя независимыми углами, через которые выражаются девять направляющих косинусов осей $G\xi'$, $G\eta'$, $G\zeta'$ в системе $Oxyz$.

За эти три независимых угла можно выбрать, например, три угла Эйлера: угол прецессии ψ, т. е. угол между направлением Gx, проходящим через G параллельно оси Ox, и направлением линии узлов плоскости $G\xi'\eta'$ на плоскости, параллельной плоскости Oxy; угол собственнного вращения φ, т. е. угол между направлением упомянутой линии узлов и

*) Например, если тело T есть шаровой или эллипсоидальный слой, то за начало собственной системы координат удобно принять центр слоя, который вовсе не принадлежит телу, но, очевидно, неизменно с ним связан.

направлением оси $G\xi'$, и угол нутации, т. е. угол между направлением оси Oz и направлением оси $G\zeta'$ (рис. 1).

Итак, положение и ориентация тела T в системе координат $Oxyz$ однозначно определяется шестью независимыми параметрами

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \psi,\quad \varphi,\quad \vartheta,$$

которые остаются постоянными, если тело T неподвижно, и изменяются со временем, если это тело движется *).

2. Возьмем теперь любую точку пространства M. Пусть в системе $Oxyz$ ее координаты будут x', y', z', а в системе $G\xi'\eta'\zeta'$ — ξ', η', ζ'. Эти шесть величин связаны, как известно, формулами преобразования координат в пространстве, так что мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \xi + a_{11}\xi' + a_{12}\eta' + a_{13}\zeta', \\ y' &= \eta + a_{21}\xi' + a_{22}\eta' + a_{23}\zeta', \\ z' &= \zeta + a_{31}\xi' + a_{32}\eta' + a_{33}\zeta', \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

где a_{ik} суть направляющие косинусы собственных осей тела в системе $Oxyz$. Эти направляющие косинусы связаны с углами Эйлера известными формулами:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\xi', x) = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta, \\ a_{21} &= \cos(\xi', y) = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta, \\ a_{31} &= \cos(\xi', z) = \sin\varphi\sin\vartheta, \\ a_{12} &= \cos(\eta', x) = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta, \\ a_{22} &= \cos(\eta', y) = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta, \\ a_{32} &= \cos(\eta', z) = \cos\varphi\sin\vartheta, \\ a_{13} &= \cos(\zeta', x) = \sin\psi\sin\vartheta, \\ a_{23} &= \cos(\zeta', y) = -\cos\psi\sin\vartheta, \\ a_{33} &= \cos(\zeta', z) = \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

3. Рассмотрим теперь элемент массы dm тела T, сосредоточенный в точке $M(x', y', z')$. Материальная точка $P(x, y, z)$ притягивает этот элемент с силой, проекции которой на оси системы $Oxyz$ суть

$$f\mu\frac{x-x'}{\Delta^3}dm,\quad f\mu\frac{y-y'}{\Delta^3}dm,\quad f\mu\frac{z-z'}{\Delta^3}dm,$$

*) Параметры, определяющие положение и ориентацию тела T, можно, разумеется, выбирать различными способами. Например, можно вместо прямоугольных координат взять полярные, а вместо эйлеровых углов какие-либо другие эквивалентные величины.

и проекции момента которой относительно центра приведения равны соответственно

$$f\mu\,\frac{(y'-\eta)(z-z')-(z'-\zeta)(y-y')}{\Delta^3}\,dm,$$
$$f\mu\,\frac{(z'-\zeta)(x-x')-(x'-\xi)(z-z')}{\Delta^3}\,dm,$$
$$f\mu\,\frac{(x'-\xi)(y-y')-(y'-\eta)(x-x')}{\Delta^3}\,dm,$$

где по-прежнему

$$\Delta=\overline{PM}=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Поэтому проекции Ξ, H, Z равнодействующей сил притяжения, действующих на элементы массы тела T, приложенной к точке G, будут

$$\left.\begin{aligned}\Xi&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{x-x'}{\Delta^3}\,dm,\\ \mathrm{H}&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{y-y'}{\Delta^3}\,dm,\\ \mathrm{Z}&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{z-z'}{\Delta^3}\,dm,\end{aligned}\right\}\tag{1.28}$$

а проекции L_x, L_y, L_z момента этой равнодействующей относительно центра приведения G определятся формулами *)

$$\left.\begin{aligned}L_x&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(y'-\eta)(z-z')-(z'-\zeta)(y-y')}{\Delta^3}\,dm,\\ L_y&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(z'-\zeta)(x-x')-(x'-\xi)(z-z')}{\Delta^3}\,dm,\\ L_z&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(x'-\xi)(y-y')-(y'-\eta)(x-x')}{\Delta^3}\,dm.\end{aligned}\right\}\tag{1.29}$$

Введем еще в рассмотрение составляющие момента силы притяжения, действующей на тело T и приложенной в G, L_φ, L_ψ, L_θ по осям: собственного вращения $G\zeta'$, прецессии Gz и нута-

*) Все приведенные здесь формулы можно найти в курсах теоретической механики. См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, изд. 3-е, 1944, и последующие; А. И. Лурье, Аналитическая механика, 1961.

ции $G\Omega$ (рис. 2). Нетрудно проверить, что

$$L_\varphi = \sin\psi \sin\vartheta L_x - \cos\psi \sin\vartheta L_y + \cos\vartheta L_z,$$
$$L_\psi = L_z,$$
$$L_\vartheta = \cos\psi L_x + \sin\psi L_y.$$

Теперь рассмотрим силовую функцию U, отличающуюся от (1.19) только множителем μ (см. формулу (1.19′)),

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}. \quad (1.30)$$

Если в формулах (1.28), (1.29) и (1.30) перейти от переменных интегрирования x', y', z' к новым переменным ξ', η', ζ' при помощи формул преобразования координат (1.26), то U и все проекции силы притяжения и ее момента относительно центра приведения G сделаются явными функциями независимых параметров ξ, η, ζ, ψ, φ, ϑ, оставаясь в то же время явными функциями координат x, y, z точки P.

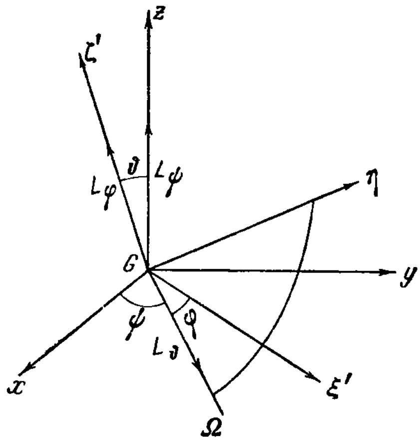

Рис. 2.

Покажем теперь, что если точка P — внешняя по отношению к телу T, то имеют место равенства

$$\Xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \mathrm{H} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \mathrm{Z} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \quad (1.31)$$

и

$$L_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad L_\psi = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad L_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta}. \quad (1.32)$$

Формулы (1.31) делаются очевидными, если заметить, например, что в силу формул (1.26) имеем

$$\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial \xi} = \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} = \frac{x - x'}{\Delta^3}.$$

Далее, очевидно, что

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.33)$$

Проверим теперь формулы (1.32), например, первую из них.

Так как

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}=-\frac{x-x'}{\Delta}\frac{\partial x'}{\partial\varphi}-\frac{y-y'}{\Delta}\frac{\partial y'}{\partial\varphi}-\frac{z-z'}{\Delta}\frac{\partial z'}{\partial\varphi},$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=f\mu\int\limits_{(T)}\left(\frac{x-x'}{\Delta^3}\frac{\partial x'}{\partial\varphi}+\frac{y-y'}{\Delta^3}\frac{\partial y'}{\partial\varphi}+\frac{z-z'}{\Delta^3}\frac{\partial z'}{\partial\varphi}\right)dm.$$

Но производные от координат x', y', z' по углу φ найдутся непосредственным дифференцированием формул (1.26) и выразятся через производные от направляющих косинусов a_{ik}. Из формул (1.27) имеем

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial\varphi}=a_{12},\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial\varphi}=-a_{11},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial\varphi}=0,$$
$$\frac{\partial a_{21}}{\partial\varphi}=a_{22},\quad \frac{\partial a_{22}}{\partial\varphi}=-a_{21},\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial\varphi}=0,$$
$$\frac{\partial a_{31}}{\partial\varphi}=a_{32},\quad \frac{\partial a_{32}}{\partial\varphi}=-a_{31},\quad \frac{\partial a_{33}}{\partial\varphi}=0,$$

а поэтому

$$\frac{\partial x'}{\partial\varphi}=a_{12}\xi'-a_{11}\eta',\quad \frac{\partial y'}{\partial\varphi}=a_{22}\xi'-a_{21}\eta',\quad \frac{\partial z'}{\partial\varphi}=a_{32}\xi'-a_{31}\eta'.$$

Подставляя сюда вместо ξ' и η' их выражения из формул

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=a_{11}(x'-\xi)+a_{21}(y'-\eta)+a_{31}(z'-\zeta),\\ \eta'&=a_{12}(x'-\xi)+a_{22}(y'-\eta)+a_{32}(z'-\zeta),\\ \zeta'&=a_{13}(x'-\xi)+a_{23}(y'-\eta)+a_{33}(z'-\zeta),\end{aligned}\right\}\qquad(1.26')$$

соответствующих обратному преобразованию, мы получим

$$\frac{\partial x'}{\partial\varphi}=a_{23}(z'-\zeta)-a_{33}(y'-\eta),$$
$$\frac{\partial y'}{\partial\varphi}=a_{33}(x'-\xi)-a_{13}(z'-\zeta),$$
$$\frac{\partial z'}{\partial\varphi}=a_{13}(y'-\eta)-a_{23}(x'-\xi).$$

Подставляя, наконец, эти производные в выражение для $\frac{\partial U}{\partial\varphi}$, найдем, что

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=a_{13}L_x+a_{23}L_y+a_{33}L_z=L_\varphi.$$

Подобным же образом проверяются и две остальные формулы (1.32).

Таким образом, функция U полностью определяет и силу, с которой тело T притягивает точку P, и силу, с которой точка P притягивает тело T.

Поэтому функцию U, определенную формулой (1.30), будем называть **силовой функцией взаимного притяжения** материальной точки P и материального тела T или (хотя и не совсем правильно!) их **взаимным потенциалом.**

§ 10. Взаимное притяжение материальных тел

1. Рассмотрим теперь два материальных тела T_1 и T_2, каждое из которых имеет определенную структуру и может быть трехмерным телом или простым слоем или материальной линией.

Пусть ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты в системе $Oxyz$ (произвольно выбранной, но с неизменными направлениями осей) точки G_i ($i=1$, 2), неизменно связанной с телом T_i, а ψ_i, φ_i, ϑ_i — эйлеровы углы, определяющие ориентацию относительно $Oxyz$ собственной системы отсчета, жестко связанной с телом T_i и с началом в точке G_i.

Пусть, далее, $M_i(x'_i,\ y'_i,\ z'_i)$ — произвольная точка тела T_i, в которой сосредоточена элементарная масса dm_i.

Точка M_i ($i=1$, 2) притягивается точкой M_j другого тела ($j=2$, 1) с силой, проекции которой на оси основной системы координат $Oxyz$ суть

$$f\frac{x'_j-x'_i}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,\quad f\frac{y'_j-y'_i}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,\quad f\frac{z'_j-z'_i}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

а проекции момента этой силы относительно центра приведения G_i на те же оси выражаются так:

$$f\frac{(y'_i-\eta_i)(z'_j-z'_i)-(z'_i-\zeta_i)(y'_j-y'_i)}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

$$f\frac{(z'_i-\zeta_i)(x'_j-x'_i)-(x'_i-\xi_i)(z'_j-z'_i)}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

$$f\frac{(x'_i-\xi_i)(y'_j-y'_i)-(y'_i-\eta_i)(x'_j-x'_i)}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

где

$$\Delta_{ij}=\Delta_{12}=\sqrt{(x'_1-x'_2)^2+(y'_1-y'_2)^2+(z'_1-z'_2)^2}.$$

Поэтому проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на тело T_i ($i=1$, 2) со стороны другого тела, и