Таким образом, функция U полностью определяет и силу, с которой тело T притягивает точку P, и силу, с которой точка P притягивает тело T.

Поэтому функцию U, определенную формулой (1.30), будем называть силовой функцией взаимного притяжения материальной точки P и материального тела T или (хотя и не совсем правильно!) их взаимным потенциалом.

§ 10. Взаимное притяжение материальных тел

1. Рассмотрим теперь два материальных тела T_1 и T_2, каждое из которых имеет определенную структуру и может быть трехмерным телом или простым слоем или материальной линией.

Пусть ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты в системе $Oxyz$ (произвольно выбранной, но с неизменными направлениями осей) точки G_i ($i=1, 2$), неизменно связанной с телом T_i, а ψ_i, φ_i, ϑ_i — эйлеровы углы, определяющие ориентацию относительно $Oxyz$ собственной системы отсчета, жестко связанной с телом T_i и с началом в точке G_i.

Пусть, далее, $M_i(x_i', y_i', z_i')$ — произвольная точка тела T_i, в которой сосредоточена элементарная масса dm_i.

Точка M_i ($i=1, 2$) притягивается точкой M_j другого тела ($j=2, 1$) с силой, проекции которой на оси основной системы координат $Oxyz$ суть

$$f\frac{x_j'-x_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,\quad f\frac{y_j'-y_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,\quad f\frac{z_j'-z_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,$$

а проекции момента этой силы относительно центра приведения G_i на те же оси выражаются так:

$$f\frac{(y_i'-\eta_i)(z_j'-z_i')-(z_i'-\zeta_i)(y_j'-y_i')}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,$$

$$f\frac{(z_i'-\zeta_i)(x_j'-x_i')-(x_i'-\xi_i)(z_j'-z_i')}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,$$

$$f\frac{(x_i'-\xi_i)(y_j'-y_i')-(y_i'-\eta_i)(x_j'-x_i')}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,$$

где

$$\Delta_{ij}=\Delta_{12}=\sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2}.$$

Поэтому проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на тело T_i ($i=1, 2$) со стороны другого тела, и приложенной к центру приведения G_i, будут

$$\left.\begin{aligned}
\Xi_{ij} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{x'_j - x'_i}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,\\
\mathrm{H}_{ij} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{y'_j - y'_i}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,\\
\mathrm{Z}_{ij} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{z'_j - z'_i}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,
\end{aligned}\right\} \qquad (1.28')$$

а проекции на те же оси $Oxyz$ момента этой равнодействующей относительно центра приведения G_i выразятся следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
L_x^{(i,\,j)} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(y'_i - \eta_i)(z'_j - z'_i) - (z'_i - \zeta_i)(y'_j - y'_i)}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,\\
L_y^{(i,\,j)} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(z'_i - \zeta_i)(x'_j - x'_i) - (x'_i - \xi_i)(z'_j - z'_i)}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,\\
L_z^{(i,\,j)} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(x'_i - \xi_i)(y'_j - y'_i) - (y'_i - \eta_i)(x'_j - x'_i)}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.29')$$

Интегралы в формулах (1.28′) и (1.29′) распространены на массы обоих тел и порядок этих интегралов может быть любым от второго (когда каждое тело есть материальная линия) до шестого (когда каждое тело имеет три измерения), в зависимости от структуры каждого из рассматриваемых тел.

2. Введем теперь в рассмотрение функцию

$$U_{ij} = f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{dm_j}{\Delta_{ij}} \qquad (i,\ j = 1,\ 2). \qquad (1.30')$$

Эта функция, так же как и функции (1.28′), (1.29′), в силу формул преобразования к собственным системам координат *) будут функциями двенадцати независимых параметров: ξ_i, η_i, ζ_i, ψ_i, φ_i, ϑ_i, ξ_j, η_j, ζ_j, ψ_j, φ_j, ϑ_j $(i = 1,\ j = 2)$.

---

*) Эти формулы пишутся так же как и формулы (1.26) и (1.27), где все буквы нужно только отметить соответствующими значками, относящимися к телам T_i и T_j $(i=1,\ j=2)$.

Совершенно так же как и выше, покажем, что

$$\Xi_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i}, \quad \mathrm{H}_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta_i}, \quad \mathrm{Z}_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \zeta_i}, \tag{1.31'}$$

$$L_{\varphi_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i}, \quad L_{\psi_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \psi_i}, \quad L_{\vartheta_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vartheta_i}, \tag{1.32'}$$

где три новые составляющие момента силы определяются формулами

$$L_{\varphi_i}^{(i,\,j)} = \sin\psi_i \sin\vartheta_i L_x^{(i,\,j)} - \cos\psi_i \sin\vartheta_i L_y^{(i,\,j)} + \cos\vartheta_i L_z^{(i,\,j)},$$

$$L_{\psi_i}^{(i,\,j)} = L_z^{(i,\,j)},$$

$$L_{\vartheta_i}^{(i,\,j)} = \cos\psi_i L_x^{(i,\,j)} + \sin\psi_i L_y^{(i,\,j)}.$$

Нужно отметить, что справедливость формул (1.31′) и (1.32′) установлена только для того случая, когда тела T_1 и T_2 не имеют общей части, так как только в этом случае можно применять к (1.30′) правило дифференцирования определенного интеграла по параметру без специального исследования.

Функция (1.30′) называется *силовой функцией взаимного притяжения* двух тел или их *взаимным потенциалом*.

Полученные результаты немедленно распространяются на случай системы, состоящей из любого конечного числа материальных тел T_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, каждое из которых может быть трехмерным, двумерным или одномерным.

Определяя взаимную силовую функцию любой пары тел T_i и T_j $(i, j=1, 2, \ldots, n, i\neq j)$ той же формулой (1.30′), введем силовую функцию всей материальной системы тел $T_1, T_2, \ldots, T_n$ формулой

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}. \tag{1.30''}$$

Эта функция U будет функцией $6n$ независимых параметров $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \psi_i, \varphi_i, \vartheta_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Тогда, если только никакие два из n тел T_i не имеют общей части, для составляющих силы, действующей на тело T_i, и ее момента относительно центра приведения G_i, будут справедливы формулы *)

$$\Xi_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \Xi_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad L_{\psi_i}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}{}' L_{\psi_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U}{\partial \psi_i},$$

$$\mathrm{H}_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \mathrm{H}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad L_{\varphi_i}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}{}' L_{\varphi_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i},$$

$$\mathrm{Z}_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \mathrm{Z}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \quad L_{\vartheta_i}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}{}' L_{\vartheta_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}.$$

Если вместо прямоугольных координат какой-либо из точек G_i ввести ее цилиндрические или полярные сферические координаты, как мы делали в § 4, то соответствующие частные производные от функции U определят составляющие силы притяжения соответственно по трем другим направлениям. Такие составляющие выразятся теми же формулами, что и в § 4, но вместо U нужно брать ее общее выражение (1.30″).

Заметим притом, что вовсе не обязательно определять все точки G_i координатами одного и того же рода. Таким образом, вполне возможно (если это оказывается удобным) для одних точек взять прямоугольные координаты, для других — цилиндрические или сферические и т. д.

*) Штрих при знаке суммы означает, так же как и выше, что при суммировании нужно пропустить член, для которого $j=i$.