ГЛАВА II

СВОЙСТВА СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Свойства силовой функции взаимного притяжения тела и точки во внешнем пространстве

В начале первой главы мы указали на некоторые очевидные свойства силовой функции ньютоновского притяжения материальной точки другой материальной точкой или системой конечного числа материальных точек.

Здесь будет показано, что эти свойства распространяются без всякого затруднения и на общий случай, когда одна из двух притягивающихся масс образует непрерывно протяженное тело (одного, двух или трех измерений — безразлично).

1. Рассмотрим некоторое материальное тело T конечных размеров с непрерывной (или хотя бы с интегрируемой) плотностью $\delta(M)$ и материальную точку P конечной массы μ.

Тогда силовая функция взаимного притяжения тела T и точки P определится формулой

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{2.1}$$

где

$$dm = \delta(M)\, dT$$

— элемент притягивающей массы, сосредоточенной в точке тела $M(x', y', z')$,

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

— расстояние от точки $P(x, y, z)$ до точки M, и интеграл (однократный, двойной или тройной) распространен на всю массу тела T.

Силовая функция U есть некоторая определенная функция координат x, y, z точки P и шести величин, определяющих положение и ориентацию тела T относительно неизменной системы координат $Oxyz$ *).

За эти величины можно принять, например, прямоугольные координаты ξ, η, ζ какой-либо произвольно выбранной точки G, жестко связанной с телом, и эйлеровы углы ψ, φ, ϑ, определяющие ориентацию «собственной» системы осей, неизменно связанных с телом и имеющих начало в точке G.

Кроме того, функция U зависит от параметров, определяющих форму, размеры и структуру тела T, которые могут быть постоянными величинами (когда тело T рассматривается в данной задаче как твердое) и, вообще говоря, некоторыми функциями времени.

В этой книге упомянутые параметры всегда будут подразумеваться как величины постоянные, так что функция U рассматривается как функция девяти независимых между собой переменных.

При этом может случиться, что мы можем рассматривать тело T как неподвижное. Тогда координаты точки G и эйлеровы углы будут величинами постоянными и U будет функцией только от трех координат точки P. В других случаях, наоборот, можно рассматривать точку P как неподвижную и тогда U будет функцией от шести независимых переменных, определяющих положение и ориентацию тела T в пространстве.

Так как функция U выражается некоторым определенным интегралом, в котором координаты точки P и тела T играют роль параметров **), то вид и аналитическая структура этой функции могут быть весьма сложными.

Действительно, интеграл в формуле (2.1) зависит, как было отмечено, и от формы тела T и от его физического строения и в конечном виде выражается чрезвычайно редко. Но даже в тех немногих случаях, когда интеграл (2.1) вычисляется до конца при помощи известных функций, его выражение оказывается обычно столь сложным и громоздким, что усмотреть непосредственно свойства функции, им определяемой, оказывается чрезвычайно затруднительным.

Поэтому представляет значительный интерес (и теоретический и практический) исследовать, насколько это возможно, свойства функции, определяемой формулой (2.1), не связывая это исследование с возможностью вычисления интеграла в конечном виде.

---

*) Под неизменной системой координат мы подразумеваем систему отсчета, никак не связанную с притягивающими массами. Наоборот, «собственной» системой координат является система отсчета, жестко связанная с телом.

**) То есть эти величины остаются неизменными во время процесса интегрирования, когда переменными являются координаты «текущей» точки x', y', z'.

2. Перейдем к рассмотрению этих свойств, предполагая в этом параграфе, что точка P находится во внешнем относительно тела T пространстве, т. е. что материальная частица μ не составляет части притягивающей массы, образующей наше тело.

Тогда расстояние $\Delta=\overline{PM}$ не обращается в нуль ни для какого положения точки P в указанной области, а так как плотность тела $\delta(M)$ непрерывна, или интегрируема, и область, занимаемая телом (т. е. область интегрирования) конечна, то интеграл в формуле (2.1) будет заведомо собственным, а из этого обстоятельства сразу вытекают следующие свойства*):

Свойство 1. Силовая функция U, рассматриваемая как функция координат точки P, конечна, непрерывна и однозначна во всем внешнем пространстве.

Свойство 2. Силовая функция U, рассматриваемая как функция координат центра приведения G и эйлеровых углов, определяющих ориентацию тела T, также конечна, непрерывна и однозначна, пока точка P остается во внешнем относительно тела пространстве.

Свойство 3. Силовая функция U, рассматриваемая как функция всех девяти независимых между собою переменных x, y, z, ξ, η, ζ, ψ, φ, ϑ, остается конечной, непрерывной и однозначной, пока точка P не составляет часть массы тела T.

Свойство 4. Частные производные от силовой функции U любого порядка, вычисленные по любым координатам точки P и тела T и рассматриваемые или как функции точки P, или как функции координат тела T, или как функции всех девяти независимых переменных, также все конечны, непрерывны и однозначны, пока точка P находится во внешнем относительно тела T пространстве.

Рассмотрим теперь составляющие силы притяжения, действующей на точку P, а также составляющие силы, действующей на тело T, и ее момента относительно центра приведения G. Мы имеем

$$X=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm,\quad Y=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm,\quad Z=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm. \tag{2.2}$$

*) Эти свойства просто являются следствиями свойств определенного интеграла.

Заметим, кроме того, что формулы (1.28) для составляющих силы, действующей на тело (и приложенной к центру приведения G), и формулы (1.29) для составляющих момента этой силы могут быть переписаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= -X, & L_x &= (z-\zeta)Y-(y-\eta)Z, \\ \mathrm{H} &= -Y, & L_y &= (x-\xi)Z-(z-\zeta)X, \\ \mathrm{Z} &= -Z, & L_z &= (y-\eta)X-(x-\xi)Y. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Отсюда непосредственно следует:

Свойство 5. Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, так же как и составляющие силы притяжения, действующей на тело T, и ее момента относительно центра приведения G, рассматриваемые либо как функции координат точки P, либо как функции координат тела T, либо как функции тех и других величин одновременно, все конечны, непрерывны и однозначны, когда точка P находится во внешнем для тела T пространстве.

Результаты § 9 главы I позволяют также сформулировать следующее свойство:

Свойство 6. Формулы

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x}, & Y &= \frac{\partial U}{\partial y}, & Z &= \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \Xi &= \frac{\partial U}{\partial \xi}, & \mathrm{H} &= \frac{\partial U}{\partial \eta}, & \mathrm{Z} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \\ L_\psi &= \frac{\partial U}{\partial \psi}, & L_\varphi &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & L_\vartheta &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

остаются справедливыми, пока точка P находится во внешнем относительно тела T пространстве.

3. Посмотрим теперь, как ведут себя силовая функция U и ее частные производные первого порядка, если расстояние

$$R = \overline{PG} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

между точкой P и точкой G, неизменно связанной с телом, неограниченно увеличивается.

Обозначим через R' расстояние от текущей точки M тела T до точки G (рис. 3), а через $\overline{R}$ — наибольшее из всех возможных расстояний R' (разумеется, предполагается, что R' есть величина конечная). Предполагая, что $R > \overline{R}$, имеем по свойству треугольника

$$R-\overline{R} < R-R' < \Delta < R+R' < R+\overline{R},$$

откуда

$$\frac{R}{R+\overline{R}} < \frac{R}{\Delta} < \frac{R}{R-\overline{R}}.$$

Умножая все части этого неравенства на положительную величину $f\mu\, dm$ и интегрируя по всей массе тела, имеем*)

$$\frac{f\mu m R}{R+\overline{R}} < f\mu R \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta} < \frac{f\mu m R}{R-\overline{R}},$$

откуда

$$\lim_{R\to\infty} (R\cdot U) = f\mu m, \tag{2.5}$$

что можно сформулировать как

Свойство 7. Когда расстояние R между точкой P и точкой G, жестко связанной с телом T, неограниченно растет, то произведение $R\cdot U$ стремится к определенному, конечному пределу, равному $f\mu m$, где m есть полная масса тела.

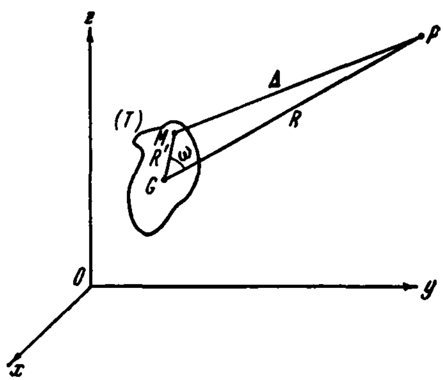

Рис. 3.

Из этого свойства выводится весьма важное следствие, а именно: если расстояние R весьма велико по сравнению с наибольшим из расстояний точек тела до центра приведения G, то взаимная силовая функция точки P и тела T весьма мало отличается от взаимной силовой функции материальной точки с массой μ и материальной точки G, в которой сосредоточена вся масса m тела T.

Положим теперь

$$F = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta^2}.$$

Тогда, точно так же как и выше, найдем

$$\lim_{R\to\infty} (R^2F) = f\mu m.$$

*) Предполагается, что плотность $\delta(M)$ тела T есть неотрицательная функция текущей точки M, так что масса тела m есть величина заведомо положительная.

Обращаясь затем к формулам (2.2), выводим

$$R^2|X| \leqslant f\mu R^2 \int\limits_{(T)} \left|\frac{x'-x}{\Delta}\right| \frac{dm}{\Delta^2} \leqslant R^2 F,$$

откуда

$$\lim_{R\to\infty} |R^2X| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2Y| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2Z| \leqslant f\mu m;$$

кроме того, из первой группы формул (2.3) имеем также

$$\lim_{R\to\infty} |R^2\Xi| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2\mathrm{H}| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2\mathrm{Z}| \leqslant f\mu m,$$

а вторая группа формул (2.3) дает

$$\lim_{R\to\infty} L_x = \lim_{R\to\infty} L_y = \lim_{R\to\infty} L_z = 0.$$

Выведем еще одно предельное соотношение. Из треугольника MGP (см. рис. 3) имеем

$$\Delta^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\omega,$$

где ω есть угол, образованный $\overline{GM}$ и $\overline{GP}$.

Отсюда находим

$$\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R} = -\frac{R - R'\cos\omega}{\Delta^3},$$

и, следовательно,

$$R^2\frac{\partial U}{\partial R} = -f\mu \int\limits_{(T)} \frac{R^3}{\Delta^3}\,dm + f\mu \int\limits_{(T)} \frac{R^2R'\cos\omega}{\Delta^3}\,dm,$$

откуда, имея в виду, что

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R}{\Delta} = 1, \quad \lim_{R\to\infty} \frac{R'}{\Delta} = 0,$$

найдем

$$\lim_{R\to\infty}\left(R^2\frac{\partial U}{\partial R}\right) = -f\mu m.$$

Выведенные предельные соотношения дают следующее свойство:

Свойство 8. Силовая функция взаимного притяжения материальной точки P и тела T, рассматриваемая как функция координат точки P или как функция координат точки G, жестко связанной с телом, есть функция, регулярная на бесконечности*).

*) См., например, Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946, а также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III (любое издание).

Из полученных результатов вытекает, что когда расстояние R достаточно велико по сравнению с линейными размерами тела, то имеют место приближенные равенства

$$U \approx f\frac{\mu m}{R}, \quad \frac{\partial U}{\partial R} \approx -f\frac{\mu m}{R^2}, \tag{2.6}$$

которые приводят к формулировке следующего следствия:

Следствие. Тело T любой формы и любой структуры и весьма удаленная от него материальная точка P взаимно притягиваются так, как будто вся масса тела сконцентрирована в точке G.

4. Перейдем теперь к рассмотрению вторых частных производных от силовой функции взаимного притяжения тела и материальной точки. Дифференцируя для этого первую группу формул (2.4), мы имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial Y}{\partial z},$$

откуда с помощью формул (2.2), предполагая по-прежнему, что точка P не составляет части тела T, находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f\mu \int\limits_{(T)} \left\{ -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(x'-x)^2}{\Delta^5} \right\} dm,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f\mu \int\limits_{(T)} \left\{ -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(y'-y)^2}{\Delta^5} \right\} dm,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f\mu \int\limits_{(T)} \left\{ -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(z'-z)^2}{\Delta^5} \right\} dm.$$

Складывая эти три равенства, имеем

$$\nabla U(x, y, z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{2.7}$$

Далее, в силу соотношений (2.3) и (2.4), находим

$$\nabla U(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0. \tag{2.7'}$$

В результате имеем следующее свойство:

Свойство 9. В любой области пространства, не включающей в себя точек, принадлежащих телу T, силовая функция U, рассматриваемая как функция координат точки P или как функция координат точки G, жестко связанной с телом T, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Примечание 1. Мы можем также сказать, что силовая функция взаимного притяжения точки и тела есть гармоническая функция координат точки P (при постоянных значениях координат G), а также есть гармоническая функция координат точки G (при постоянных значениях P). При этом в обоих случаях эйлеровы углы ψ, φ, ϑ рассматриваются как величины постоянные.

Примечание 2. Если рассматривать U как функцию девяти независимых переменных, то остается неизвестным, удовлетворяет ли эта функция какому-либо уравнению, обобщающему уравнение Лапласа или нет.

Примечание 3. Легко видеть, что потенциал двойного слоя W, распределенного на некоторой гладкой поверхности S с непрерывной или только интегрируемой плотностью $\mu(M)$, есть функция координат точки P, единичной массы, удовлетворяющая автоматически свойствам 1), 4) и 9). Действительно, по формуле (1.24) § 8, главы I функция W составляется из первых производных трех потенциалов простых слоев, лежащих на той же поверхности S. Так как потенциал любого простого слоя заведомо удовлетворяет свойствам 1), 4) и 9), то и W удовлетворяет этим же свойствам. Далее, очевидно, что

$$\nabla W = \frac{\partial}{\partial x} \nabla U_1 + \frac{\partial}{\partial y} \nabla U_2 + \frac{\partial}{\partial z} \nabla U_3,$$

а так как

$$\nabla U_1 = 0, \quad \nabla U_2 = 0, \quad \nabla U_3 = 0,$$

то имеем также

$$\nabla W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0,$$

т. е. потенциал двойного слоя также удовлетворяет уравнению Лапласа в любой области пространства, не содержащей в себе точек поверхности S.

§ 2. Свойства силовой функции взаимного притяжения двух конечных тел

1. Все результаты, полученные в § 1, легко распространяются также на случай двух произвольных притягивающих тел, каждое из которых имеет конечные размеры, обладает непрерывной, или интегрируемой, плотностью и может быть одномерным, двумерным или трехмерным.

В этом случае, как мы видели выше, силовая функция взаимного притяжения двух тел определяется формулой

$$U = f \int\limits_{(T_1)} \int\limits_{(T_2)} \frac{dm_1 \, dm_2}{\Delta}, \tag{2.8}$$