функция координат точки P (при постоянных значениях координат G), а также есть гармоническая функция координат точки G (при постоянных значениях P). При этом в обоих случаях эйлеровы углы ψ, φ, ϑ рассматриваются как величины постоянные.

Примечание 2. Если рассматривать U как функцию девяти независимых переменных, то остается неизвестным, удовлетворяет ли эта функция какому-либо уравнению, обобщающему уравнение Лапласа или нет.

Примечание 3. Легко видеть, что потенциал двойного слоя W, распределенного на некоторой гладкой поверхности S с непрерывной или только интегрируемой плотностью $\mu(M)$, есть функция координат точки P, единичной массы, удовлетворяющая автоматически свойствам 1), 4) и 9). Действительно, по формуле (1.24) § 8, главы I функция W составляется из первых производных трех потенциалов простых слоев, лежащих на той же поверхности S. Так как потенциал любого простого слоя заведомо удовлетворяет свойствам 1), 4) и 9), то и W удовлетворяет этим же свойствам. Далее, очевидно, что

$$\nabla W = \frac{\partial}{\partial x} \nabla U_1 + \frac{\partial}{\partial y} \nabla U_2 + \frac{\partial}{\partial z} \nabla U_3,$$

а так как

$$\nabla U_1 = 0, \quad \nabla U_2 = 0, \quad \nabla U_3 = 0,$$

то имеем также

$$\nabla W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0,$$

т. е. потенциал двойного слоя также удовлетворяет уравнению Лапласа в любой области пространства, не содержащей в себе точек поверхности S.

§ 2. Свойства силовой функции взаимного притяжения двух конечных тел

1. Все результаты, полученные в § 1, легко распространяются также на случай двух произвольных притягивающих тел, каждое из которых имеет конечные размеры, обладает непрерывной, или интегрируемой, плотностью и может быть одномерным, двумерным или трехмерным.

В этом случае, как мы видели выше, силовая функция взаимного притяжения двух тел определяется формулой

$$U = f \int\limits_{(T_1)} \int\limits_{(T_2)} \frac{dm_1\, dm_2}{\Delta}, \tag{2.8}$$

где интеграл (наименьшая кратность которого есть 2, а наибольшая равна 6) берется и по всей массе тела T_1 и по всей массе тела T_2. В общем случае U есть функция 12 независимых между собою переменных

$$\left.\begin{matrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1, & \psi_1, & \varphi_1, & \vartheta_1, \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2, & \psi_2, & \varphi_2, & \vartheta_2, \end{matrix}\right\} \tag{2.9}$$

но число переменных может быть в некоторых случаях и меньше 12.

Например, если одно из тел рассматривается как неподвижное, то U будет функцией только шести координат другого тела. Если одно тело неподвижно, а другое сохраняет неизменную ориентацию в пространстве, то U есть функция только трех координат центра приведения другого тела и т. д.

В любой области пространства, не включающей в себя точек тел T_1 и T_2, интеграл в формуле (2.8) есть собственный и функция U (так же как и всякая ее частная производная по любым из координат тел T_1 и T_2), конечна, непрерывна и однозначна.

Формулы, определяющие составляющие сил притяжений и их моментов,

$$\left.\begin{matrix} \Xi_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_1}, & \mathrm{H}_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_1}, & \mathrm{Z}_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \\ L_{\psi_1}^{(1)} = \dfrac{\partial U}{\partial \psi_1}, & L_{\varphi_1}^{(1)} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_1}, & L_{\vartheta_1}^{(1)} = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta_1}, \\ \Xi_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_2}, & \mathrm{H}_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_2}, & \mathrm{Z}_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_2}, \\ L_{\psi_2}^{(2)} = \dfrac{\partial U}{\partial \psi_2}, & L_{\varphi_2}^{(2)} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_2}, & L_{\vartheta_2}^{(2)} = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta_2} \end{matrix}\right\} \tag{2.10}$$

справедливы во всем пространстве, за исключением общих точек тел T_1 и T_2.

2. Рассмотрим теперь взаимное притяжение двух тел, когда расстояние между ними весьма велико по сравнению с их линейными размерами.

Пусть $G_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ и $G_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ суть точки, жестко связанные с T_1 и T_2 соответственно (центры приведения), а $M_1(x_1', y_1', z_1')$ и $M_2(x_2', y_2', z_2')$—текущие точки этих тел. Положим

$$\overline{G_1G_2} = R, \quad \overline{G_1M_1} = R_1', \quad \overline{G_2M_2} = R_2',$$
$$\overline{G_1M_2} = R_1, \quad \overline{G_2M_1} = R_2,$$

тогда из треугольников $G_1M_1M_2$, $G_1M_1G_2$, $G_2M_2M_1$ и $G_2M_2G_1$ (рис. 4) имеем

$$R_1 - R_1' < \Delta < R_1 + R_1',$$
$$R_2 - R_2' < \Delta < R_2 + R_2',$$
$$R_2 - R_1' < R < R_2 + R_1',$$
$$R_1 - R_2' < R < R_1 + R_2',$$

откуда находим

$$R - R_1' - R_2' < \Delta < R + R_1' + R_2'.$$

Обозначая теперь через $\overline{R}$ наибольшее из всех возможных

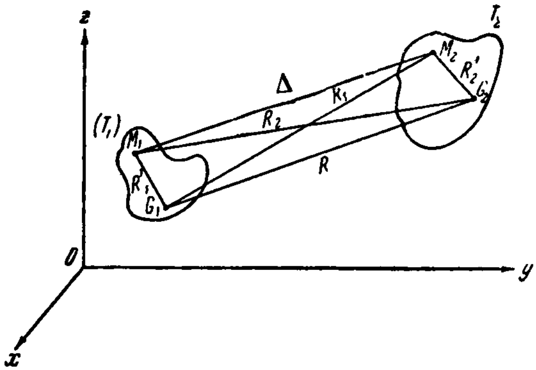

Рис. 4.

расстояний R_1' и R_2', перепишем последнее неравенство в следующем виде:

$$R - 2\overline{R} < \Delta < R + 2\overline{R},$$

откуда следует, что *)

$$\frac{R}{R + 2\overline{R}} < \frac{R}{\Delta} < \frac{R}{R - 2\overline{R}}.$$

Умножая все части последнего неравенства на положительную величину $f\,dm_1\,dm_2$ и интегрируя по всей массе тела T_1 и по всей массе тела T_2, получим неравенство

$$\frac{fRm_1m_2}{R + 2\overline{R}} < RU < \frac{fRm_1m_2}{R - 2\overline{R}},$$

откуда выводим

$$\lim_{R\to\infty} (RU) = fm_1m_2. \tag{2.5'}$$

*) Предполагается, конечно, что $R \gg \overline{R}$, т. е. что тела весьма удалены друг от друга.

Далее, так же как и выше, найдем

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial \xi_1}\right| \leqslant fm_1m_2, \ \ldots,$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right| \leqslant fm_1m_2, \ \ldots$$

Теперь из треугольников $G_1M_1M_2$ и $G_1G_2M_2$ имеем

$$\Delta^2 = R_1^2 + R_1'^2 - 2R_1R_1'\cos\omega_1; \quad \omega_1 = \angle M_1G_1M_2,$$

$$R_1^2 = R^2 + R_2'^2 - 2RR_2'\cos\omega_2; \quad \omega_2 = \angle G_1G_2M_2,$$

откуда выводим

$$R^2\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R} = -\frac{R^2}{\Delta^2}\cdot\frac{R - R_2'\cos\omega_2}{\Delta}\left(1 + \frac{R_1'}{R_1}\cos\omega_1\right),$$

с помощью чего получим

$$\lim_{R\to\infty}\left(R^2\frac{\partial U}{\partial R}\right) = \lim_{R\to\infty}\left\{fR^2\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R}\,dm_1\,dm_2\right\} = -fm_1m_2.$$

Из полученных соотношений вытекает следующее важное следствие:

Следствие. Если расстояние R достаточно велико по сравнению с линейными размерами обоих тел T_1 и T_2, то имеем следующие приближенные равенства:

$$U \approx f\frac{m_1m_2}{R}, \quad \frac{\partial U}{\partial R} \approx -f\frac{m_1m_2}{R^2}, \tag{2.6'}$$

которые показывают, что два достаточно удаленных друг от друга, совершенно произвольных по форме и структуре тела T_1 и T_2 притягиваются взаимно почти так же, как две материальные точки, массы которых равны массам тел m_1 и m_2 и расстояние между которыми равно R.

Этот чрезвычайно важный результат показывает, что в ряде случаев можно совершенно отвлечься от формы и структуры взаимно притягивающихся тел и рассматривать эти тела просто как материальные точки, повинующиеся в точности закону притяжения Ньютона.

Заметим, что этот вывод будет справедлив также и для случая системы какого угодно конечного числа взаимно притягивающихся тел, лишь бы все их взаимные расстояния были достаточно велики по сравнению с линейными размерами каждого из них.

Поэтому, например, все большие планеты и Солнце, образующие основную часть нашей солнечной системы и находящиеся, как известно, на очень больших расстояниях друг от друга (значительно больших, чем диаметр самого Солнца), могут рассматриваться в небесной механике как материальные точки, что значительно упрощает постановку задачи о движении этих тел.

С другой стороны, следует всегда иметь в виду, что в случаях, когда расстояние между телами сравнимо с их линейными размерами, то замена тел материальными точками недопустима, так как может привести к весьма значительным ошибкам при изучении их движений.

Так, например, при изучении движений близких спутников планет, или близких искусственных спутников Земли, Луны и т. п., невозможно рассматривать центральное тело как материальную точку и необходимо принимать во внимание его форму и структуру.

3. Отметим, наконец, что, рассматривая силовую функцию U, определенную формулой (2.8), где

$$\Delta=\sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2},$$

как функцию только координат точки G_1 или как функцию только координат точки G_2, мы получим в силу формул, подобных формулам (1.26), следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta_1^2}=0$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta_2^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta_2^2}=0.$$

Действительно, по формулам (1.26), в которых нужно только все координаты снабдить нижними индексами 1 или 2, а все направляющие косинусы такими же верхними индексами, мы будем иметь, например,

$$\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \xi_1^2}=\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial x_1'^2}$$

и аналогично по двум другим координатам. Но

$$\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial y_1'^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial z_1'^2}=0,$$

а поэтому

$$\nabla U(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)=f\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\left[\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \zeta_1^2}\right]dm_1\,dm_2=0$$

Полученные равенства показывают, что $U(G_1)$ и $U(G_2)$ суть гармонические функции во всем внешнем относительно тел T_1 и T_2 пространстве *).

§ 3. Свойства притяжения вблизи и внутри притягивающей массы

1. Рассматривая в § 1 этой главы свойства притяжения во внешнем относительно притягивающих масс пространстве, мы имели возможность не обращать внимания на число измерений притягивающего тела или притягивающихся тел. Действительно, мы показали, что силовое поле любого материального тела (одномерного, двумерного или трехмерного) обладает во внешнем пространстве одними и теми же общими свойствами, не зависящими вдобавок от формы и физического строения тела.

Переходя теперь к рассмотрению свойств притяжения в непосредственной близости от притягивающей материи и внутри нее, мы должны уже принимать во внимание размерность тела, так как последняя, как мы увидим, весьма существенно влияет на свойства силовой функции и ее производных.

Мы будем рассматривать только простейший случай, когда одно из двух притягивающихся тел есть безразмерная материальная частица (материальная точка!), а другое — произвольное материальное тело конечных размеров и с непрерывной плотностью (линейной, поверхностной или объемной).

Исследование будет заключаться в изучении поведения силовой функции взаимного притяжения тела и точки, а также составляющих силы притяжения, когда точка, находясь сначала во внешнем пространстве, неограниченно приближается к телу, а затем и проникает внутрь тела, делаясь частью его массы, но не утрачивая своей собственной индивидуальности. Иными словами, мы будем исследовать силовое поле притягивающего тела в непосредственной окрестности и внутри тела, так как силовое поле вне тела в существенных чертах уже известно.

Поэтому здесь мы будем преимущественно рассматривать тело T как *притягивающее*, а материальную точку P, массу которой примем для упрощения равной единице, как *притягиваемую*. Таким образом, мы можем предполагать, что тело T неподвижно относительно некоторой неизменной системы координат $Oxyz$, которую будем выбирать иногда для большей простоты каким-либо особым образом. Следовательно, силовая функция и составляющие силы притяжения будут рассматриваться как

*) Гармонической функцией в бесконечной области трехмерного пространства называется функция, правильная в этой области, регулярная на бесконечности и удовлетворяющая во всех точках области уравнению Лапласа.