Полученные равенства показывают, что $U(G_1)$ и $U(G_2)$ суть гармонические функции во всем внешнем относительно тел $T_1$ и $T_2$ пространстве *).

## § 3. Свойства притяжения вблизи и внутри притягивающей массы

1. Рассматривая в § 1 этой главы свойства притяжения во внешнем относительно притягивающих масс пространстве, мы имели возможность не обращать внимания на число измерений притягивающего тела или притягивающихся тел. Действительно, мы показали, что силовое поле любого материального тела (одномерного, двумерного или трехмерного) обладает во внешнем пространстве одними и теми же общими свойствами, не зависящими вдобавок от формы и физического строения тела.

Переходя теперь к рассмотрению свойств притяжения в непосредственной близости от притягивающей материи и внутри нее, мы должны уже принимать во внимание размерность тела, так как последняя, как мы увидим, весьма существенно влияет на свойства силовой функции и ее производных.

Мы будем рассматривать только простейший случай, когда одно из двух притягивающихся тел есть безразмерная материальная частица (материальная точка!), а другое — произвольное материальное тело конечных размеров и с непрерывной плотностью (линейной, поверхностной или объемной).

Исследование будет заключаться в изучении поведения силовой функции взаимного притяжения тела и точки, а также составляющих силы притяжения, когда точка, находясь сначала во внешнем пространстве, неограниченно приближается к телу, а затем и проникает внутрь тела, делаясь частью его массы, но не утрачивая своей собственной индивидуальности. Иными словами, мы будем исследовать силовое поле притягивающего тела в непосредственной окрестности и внутри тела, так как силовое поле вне тела в существенных чертах уже известно.

Поэтому здесь мы будем преимущественно рассматривать тело $T$ как притягивающее, а материальную точку $P$, массу которой примем для упрощения равной единице, как притягиваемую. Таким образом, мы можем предполагать, что тело $T$ неподвижно относительно некоторой неизменной системы координат $Oxyz$, которую будем выбирать иногда для большей простоты каким-либо особым образом. Следовательно, силовая функция и составляющие силы притяжения будут рассматриваться как

*) Гармонической функцией в бесконечной области трехмерного пространства называется функция, правильная в этой области, регулярная на бесконечности и удовлетворяющая во всех точках области уравнению Лапласа.

функции только от координат притягиваемой точки $P$, хотя будут зависеть также от параметров, характеризующих форму тела, его размеры и его физическое строение.

В этом параграфе мы рассмотрим случаи, когда тело $T$ есть материальная линия или материальная поверхность (простой слой).

Пусть $C$ — заданная дуга пространственной кривой, «нагруженная» притягивающей материей с линейной плотностью $\delta$, которая есть непрерывная функция точки $M$ дуги $C$. Силовая функция притяжения этой материальной линии и материальной точки $P$, единичной массы, определится, как уже известно, формулой

$$U(P) = f \int_{(C)} \frac{\delta(M)\, ds}{\Delta}$$

и является некоторой определенной функцией координат $x$, $y$, $z$ притягиваемой точки $P$.

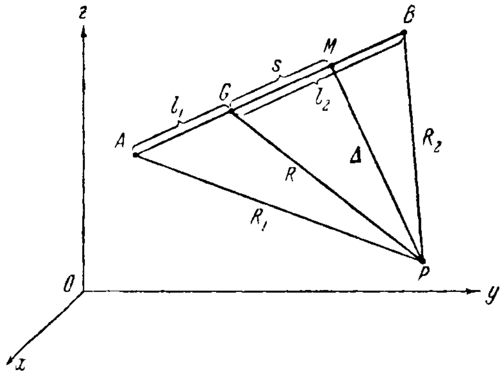


Рис. 5.

Для изучения свойств этой функции, когда точка $P$, оставаясь вне линии $C$, стремится к некоторой определенной ее точке, разберем сначала наипростейший частный случай.

Пусть $C$ есть отрезок прямой линии $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A$, а плотность $\delta$ есть величина постоянная.

Пусть $G(\xi, \eta, \zeta)$ есть произвольная **внутренняя** точка отрезка $\overrightarrow{AB}$, а $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ — его направляющие косинусы (рис. 5). Положим

$$\overline{MG} = s, \quad \overline{AG} = l_1, \quad \overline{GB} = l_2,$$
$$\overline{PG}^2 = R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$
$$\nu = \cos(\overrightarrow{PG}, \overrightarrow{AB}) = \alpha_1 \frac{\xi - x}{R} + \alpha_2 \frac{\eta - y}{R} + \alpha_3 \frac{\zeta - z}{R},$$

тогда

$$\Delta = \sqrt{R^2 + s^2 + 2R\nu s},$$

и силовая функция материального отрезка $\overline{AB}$ на точку $P$ определится формулой $[m = \delta(l_1 + l_2)]$

$$U = \frac{fm}{l_1 + l_2} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{ds}{\sqrt{R^2 + s^2 + 2R\nu s}}.$$

Этот интеграл легко вычисляется, так что $U$ может быть представлена в конечном виде *):

$$U = \frac{fm}{l_1 + l_2} \ln \frac{R_2 + l_2 + R\nu}{R_1 - l_1 + R\nu},$$

где положено, сверх того,

$$R_1^2 = \overline{PA}^2 = R^2 + l_1^2 - 2Rl_1\nu,$$
$$R_2^2 = \overline{PB}^2 = R^2 + l_2^2 + 2Rl_2\nu.$$

Дифференцируя $U$, например, по координате $x$, мы получим выражение для составляющей $X$ силы притяжения, действующей на точку $P$:

$$X = \frac{fm}{l_1 + l_2} \left\{ \frac{x - \xi - \alpha_1 (R_2 + l_2)}{R_2 (R_2 + l_2 + R\nu)} - \frac{x - \xi - \alpha_1 (R_1 - l_1)}{R_1 (R_1 - l_1 + R\nu)} \right\},$$

и аналогичные выражения для двух других составляющих.

Пусть теперь точка $P$ приближается по любому пути к точке $G$. Тогда

$$R \to 0, \quad R_1 \to l_1, \quad R_2 \to l,$$

и мы имеем

$$U \to \ln(\infty), \quad RU \to 0, \quad |X| \to \infty.$$

Таким образом, внутренние точки отрезка $\overline{AB}$ (включая его концы $A$ и $B$) являются особыми точками силового поля материального отрезка. Силовая функция $U$, а также составляющие силы притяжения неограниченно растут, когда точка $P$ приближается к отрезку $\overline{AB}$. Следует отметить, впрочем, что функция $U$ растет как логарифм, т. е. весьма медленно, а функция $X$ растет как обратное расстояние, т. е. также медленнее, чем растет составляющая силы притяжения материальной точки $G$, масса которой равна $m$.

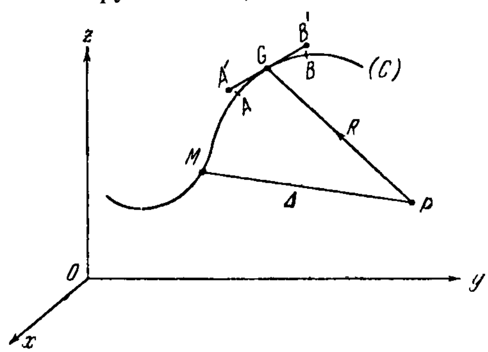


Рис. 6.

Вернемся теперь к формуле, определяющей силовую функцию произвольной материальной линии.

Пусть $G$ — любая внутренняя точка дуги $C$. Допустим, далее, что линия $C$ имеет в точке $G$ определенную касательную. Выделим весьма малый кусок дуги $\overset{\frown}{AB}$ линии $C$ (рис. 6), содержащий

*) Обратим внимание на то, что здесь мы имеем один из немногих случаев, когда силовая функция выражается в конечном виде и притом достаточно простой формулой.

внутри себя точку $G$. Благодаря малости куска дуги $\widehat{AB}$ и непрерывности линейной плотности $\delta$ этот кусок можно заменить весьма малым куском касательной, проведенной в точке $G$, и считать, что этот малый материальный отрезок имеет постоянную плотность.

Представляя $U$ в виде ($\widehat{C}=C-\widehat{AB}$)

$$U=f\int\limits_{(\widehat{C})}\frac{dm}{\Delta}+f\int\limits_{(\widehat{AB})}\frac{dm}{\Delta},$$

мы видим, что первый интеграл остается конечным, когда точка $P$ приближается к $G$, так как $G$ есть внешняя точка области интегрирования $\widehat{C}$, а второй интеграл неограниченно растет.

Отсюда непосредственно следует, что когда точка $P$ приближается по любому пути к точке $G$ линии $C$, то и силовая функция $U$, и составляющие силы притяжения, действующей на точку $P$, неограниченно растут, но рост этот весьма медленный, так же как и в случае однородного материального отрезка.

Если точка $G$ есть угловая точка линии $C$, то в ней можно провести две различные касательные. Рассматривая любую из этих двух касательных, убедимся, так же как и выше, что эта угловая точка также является особой точкой силового поля материальной линии.

2. Перейдем к рассмотрению материальной поверхности. Пусть на поверхности $S$ распределен простой слой непрерывной плотности $\delta(M)$. Силовая функция $U$ этого простого слоя на точку $P(x, y, z)$ единичной массы определится формулой

$$U(P)=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta(M)\,d\sigma}{\Delta}.$$

Чтобы исследовать свойства функции $U(P)$, когда точка $P$ приближается к какой-либо точке $M_0$ поверхности $S$, рассмотрим сначала, так же как мы это делали выше, наипростейший случай однородного простого слоя, распределенного на круглом плоском диске радиуса $a$. Однако в этом случае уже не удается получить конечное выражение для силовой функции диска на произвольную точку $P$ пространства, и мы вынуждены внести в наше рассмотрение дополнительные упрощения.

А именно, мы будем рассматривать силовую функцию диска на точку $P$, лежащую где-нибудь на перпендикуляре к плоскости диска, проходящем через его центр (рис. 7).

Выберем систему координат $Oxyz$ специальным образом, а именно—возьмем начало координат в центре диска и ось аппликат направим по перпендикуляру к его плоскости. Пусть $M$—

текущая точка на диске, а $\rho$ и $v$ — ее полярные координаты. Тогда

$$d\sigma = \rho\, d\rho\, dv$$

и силовая функция диска на точку $P(z)$, лежащую на оси аппликат, определится очевидной формулой

$$U(z) = f\delta \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

Выполняя интегрирование, мы получим

$$U(z) = 2\pi f\delta \left[\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right].$$

Из найденного выражения следует, что составляющие силы притяжения, действующей на точку $P$, будут

$$X = Y = 0, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} = 2\pi f\delta \left[\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right].$$

Рассматривая полученные выражения, мы видим, что силовая функция $U$ остается конечной и непрерывной, когда точка $P$, оставаясь на оси $Oz$, приближается к диску, т. е. к началу координат. В самом деле,

$$\lim_{z\to 0} U(z) = 2\pi f\, \delta a = U(0).$$

Таким образом, силовая функция простого однородного слоя, лежащего на круглом диске, **конечна, непрерывна и однозначна во всем пространстве.**

Следовательно, материальная линия и материальная поверхность резко отличаются друг от друга по свойствам силовой функции.

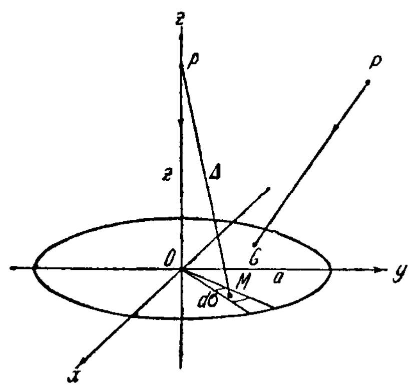


Рис. 7.

Рассматривая теперь составляющую силы притяжения по нормали к плоскости диска (т. е. производную от $U(z)$ по $z$), мы немедленно убеждаемся, что эта составляющая также конечна во всем пространстве, но терпит разрыв первого рода в начале координат.

Действительно, когда $z$ остается положительным, то $\sqrt{z^2} = z$, и, вычисляя предел составляющей $Z$ при $z \to +0$, мы получим

$$\lim_{z\to +0} Z = \lim_{z\to +0} \frac{\partial U}{\partial z} = -2\pi f\delta.$$

Наоборот, когда $z$ остается отрицательным, то $\sqrt{z^2}=-z$, и мы найдем

$$\lim_{z\to -0} Z=\lim_{z\to -0}\frac{\partial U}{\partial z}=+2\pi f\delta.$$

Следовательио, составляющая силы притяжеиия по иормали к плоскости диска, или нормальная производная силовой функции, имеет **разрыв первого рода в центре диска** и величина «скачка» равна

$$d=\lim_{z\to +0} Z-\lim_{z\to -0} Z=-4\pi f\delta.$$

Две остальные составляющие, разумеется, остаются непрерывными.

Подобный же результат, только более длинным и сложным образом, можно получить и для случая любого положения точки $P$, приближающейся к какой-либо точке $G$ диска по любому пути. Составляющие силы притяжеиия по любым направлениям, параллельным плоскости диска, остаются конечными, непрерывными и одиозначными, когда точка $P\to G$, а составляющая по нормали к плоскости диска терпит скачок, когда точка $P$ проходит через слой, лежащий на диске.

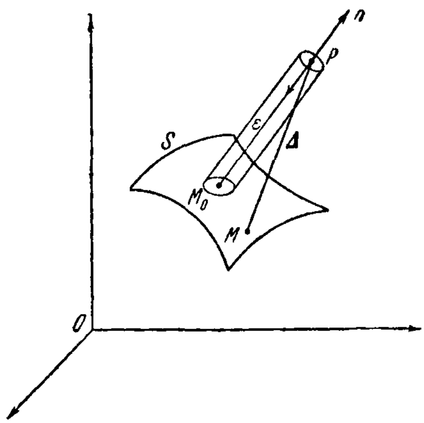


Рис. 8.

Возвратимся теперь к силовой функции произвольиого простого слоя иепрерывной плотности, распределенного на куске гладкой поверхности $S$, и покажем при помощи простых рассуждений, что и в этом случае силовая функция и ее нормальная производная ведут себя так же, как в случае однородного диска.

Пусть $M_0$ — любая внутренняя точка поверхности $S$ и $\delta_0=\delta(M_0)$ — плотность слоя в этой точке. Проведем к поверхности $S$ касательную плоскость и нормаль, на которой установим положительиое направление (см. рис. 8, на котором положительное направление нормали $n$ обозначено стрелкой). Пусть притягиваемая точка $P$ лежит на этой нормали и ее расстояние до $M_0$ есть $\varepsilon$. Вообразим, далее, прямой круглый цилиндр малого радиуса $a$, осью которого является нормаль, проведенная в точке $M_0$. Обозначим через $S_1$ и $\bar{S}_1$ части поверхности и касательной плоскости, вырезаемые этим цилиндром, а через $S_2$ — остальную часть поверхности $S$.

Обозначим, далее, через $U_1$, $U_2$, $\overline{U}_1$ соответственно силовые функции слоев, лежащих на $S_1$ и $S_2$ и однородного слоя с плотностью $\delta_0$, лежащего на круглом диске $\overline{S}_1$ с центром в точке $M_0$. Тогда

$$U(P)=U_1(P)+U_2(P),$$

а полагая

$$\overline{U}(P)=\overline{U}_1(P)+\overline{U}_2(P),$$

будем иметь, очевидно,

$$\lim_{a\to 0}\overline{U}(P)=U(P).$$

Найдем предел, к которому стремится $U(P)$, когда точка $P$, перемещаясь по положительной или по отрицательной нормали, неограниченно приближается к точке $M_0$.

Мы можем написать

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0} U(P)=\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\left[\lim_{a\to 0}\overline{U}(P)\right]=\lim_{a\to 0}\left[\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\overline{U}(P)\right].$$

Но точка $M_0$ есть центр диска $\overline{S}_1$ и одновременно является внешней точкой для слоя, лежащего на $S_2$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\overline{U}(P)=2\pi f\,\delta_0 a+U_2(M_0),$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0} U(P)=\lim_{a\to 0}\,[2\pi f\,\delta_0 a+U_2(M_0)]=U(M_0),$$

отсюда следует, что силовая функция $U(P)$ остается конечной и непрерывной, когда точка $P$ приближается к точке $M_0$ поверхности $S$.

Обозначая теперь через $N=\frac{\partial U}{\partial n}$ составляющую силы притяжения слоя по нормали к поверхности $S$, мы найдем подобным же образом, что

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0} N(P)=\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\left[\lim_{a\to 0}\overline{N}(P)\right]=\lim_{a\to 0}\left[\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\overline{N}(P)\right].$$

Учитывая выведенное выше свойство силовой функции однородного диска и помня, что $M_0$ есть внешняя точка для $S_2$, мы имеем

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\overline{N}(P)=\mp 2\pi f\delta_0+N_2(M_0),$$

откуда, следовательно, получим

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0} N(P)=\lim_{a\to 0}\,[\mp 2\pi f\,\delta_0+N_2(M_0)]=\mp 2\pi f\,\delta_0+N(M_0).$$

Таким образом, нормальная составляющая силы притяжения слоя имеет разрыв первого рода в точке $M_0$ поверхности $S$, причем величина «скачка» равна

$$d = \lim_{\varepsilon \to +0} N(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} N(P) = -4\pi f \delta_0.$$

Величина $N(M_0)$ определяется по формуле

$$N(M_0) = f \iint_{(S)} \delta(M) \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial n} d\sigma$$

и называется прямым значением нормальной составляющей силы притяжения или нормальной производной от силовой функции.

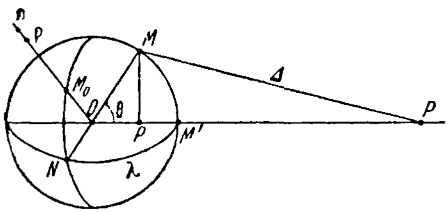


Рис. 9.

**Примечание.** Можно показать, на чем мы, однако, не будем останавливаться, что составляющие $X$, $Y$, $Z$ силы притяжения простого слоя, действующей на точку $P$, также разрывны в точке $M_0$ поверхности $S$ и величины их «скачков» равны соответственно *)

$$d_x = \lim_{\varepsilon \to +0} X(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} X(P) = -4\pi f \delta_0 \alpha_1,$$
$$d_y = \lim_{\varepsilon \to +0} Y(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} Y(P) = -4\pi f \delta_0 \alpha_2,$$
$$d_z = \lim_{\varepsilon \to +0} Z(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} Z(P) = -4\pi f \delta_0 \alpha_3,$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ — направляющие косинусы положительной нормали к поверхности $S$ в точке $M_0$.

3. Для иллюстрации свойств силовой функции простого слоя рассмотрим однородный простой слой, лежащий на сфере $\Sigma$ радиуса $a$. Пусть $O$ — центр сферы, $M$ — текущая точка его поверхности и $P$—притягиваемая точка, не лежащая на $\Sigma$ (рис. 9). Обозначим угол между $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OP}$ через $\theta$, а через $\lambda$ — угол, образованный плоскостью $OMP$ с плоскостью некоторого меридиана сферы, принимаемого за начальный **). Тогда элемент поверхности сферы в точке $M$ будет

$$d\sigma = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\lambda$$

*) См., например, Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала.

**) На рис. 9 точки $M$ и $P$ лежат в плоскости чертежа.

и силовая функция определится формулой

$$U(P)=fa^2\delta\int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\Delta}=2\pi fa^2\delta\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\Delta}.$$

Для вычисления интеграла введем вместо переменной интегрирования $\theta$ новую переменную $\Delta$. Обозначая расстояние точки $P$ до $O$ через $R$, имеем из треугольника $OMP$

$$\Delta^2=R^2+a^2-2aR\cos\theta,$$

откуда выводим

$$\frac{\sin\theta\,d\theta}{R}=\frac{d\Delta}{aR}.$$

Если точка $P$ находится во внутренней полости слоя, то $0\leqslant R<a$, и мы найдем

$$U(P)=\frac{2\pi fa^2\delta}{aR}\int_{a-R}^{a+R}d\Delta=\frac{fm}{a};$$

если же точка $P$ лежит вне сферы $\Sigma$, т. е. если $R>a$, то получим

$$U(P)=\frac{2\pi fa^2\delta}{aR}\int_{R-a}^{R+a}d\Delta=\frac{fm}{R},$$

где $m=4\pi a^2\delta$ есть полная масса слоя.

Будем теперь приближать точку $P$ к некоторой фиксированной точке $M_0$ сферы $\Sigma$ *).

Если $P$ приближается к $M_0$, оставаясь внутри сферы $\Sigma$, то $U(P)$ остается постоянной и ее предельное значение равно той же самой постоянной.

Если $P$ приближается к $M_0$, оставаясь вне сферы, то $R\to a$ и мы получим тот же предел.

Таким образом, в обоих случаях

$$\lim_{P\to M_0}U(P)=\frac{fm}{a}=4\pi f\delta a,$$

т. е. силовая функция остается непрерывной, когда точка $P$ пересекает поверхность $\Sigma$, на которой лежит слой.

Далее, примем за положительную нормаль к сфере ее внешнюю нормаль. Тогда направление этой нормали совпадает с направлением $\overrightarrow{OP}$, и мы найдем

$$\frac{\partial U}{\partial R}=0\qquad(0\leqslant R\leqslant a)$$

---

*) На рис. 9 для упрощения чертежа точка $M_0$ помещена на начальном меридиане сферы, или, если угодно, начальный меридиан проведен через данную точку $M_0$.

и

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{fm}{R^2} \qquad (R > a),$$

откуда получим

$$\lim_{R \to a-0} \frac{\partial U}{\partial R} = 0, \qquad \lim_{R \to a+0} \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{fm}{a^2} = -4\pi f\delta.$$

Таким образом, нормальная (или радиальная) составляющая силы притяжения слоя действительно имеет разрыв первого рода в точке сферы $M_0$ и величина «скачка» равна $-4\pi f\delta$.

Легко проверить прямым вычислением производной $\frac{\partial U}{\partial R}$, что ее прямое значение в точке $M_0$ сферы равно нулю.

Полученные результаты показывают, что когда точка $P$ находится внутри сферы $\Sigma$ (т. е. во внутренней полости слоя), то она вовсе не испытывает притяжения со стороны слоя*), а когда точка $P$ находится вне сферы $\Sigma$, то слой, лежащий на сфере, притягивает эту точку так, как будто вся масса слоя была сконцентрирована в его центре.

## § 4. Свойства потенциала двойного слоя

1. Рассмотрим поведение потенциала двойного слоя непрерывной плотности, распределенного на некоторой гладкой поверхности, в каждой точке которой существует, следовательно, определенная касательная плоскость.

Пусть $P$ — точка, не лежащая на поверхности $S$. Потенциал двойного слоя, распределенного на этой поверхности с плотностью $\mu(M)$, определяется формулой

$$W(P) = f \iint_{(S)} \mu(M) \frac{\cos\varphi}{\Delta^2}\, d\sigma.$$

Рассмотрим сначала частный случай двойного слоя, распределенного на круглом диске с постоянной плотностью, и пусть точка $P$ лежит на перпендикуляре к плоскости диска, проведенном через его центр (см. опять рис. 7). Считая, что положительная нормаль к плоскости диска совпадает с направлением оси $\overrightarrow{Oz}$, мы имеем

$$\Delta^2 = \rho^2 + z^2, \quad \cos\varphi = -\frac{z}{\Delta},$$

*) Этот результат представляет теорему Ньютона в ее частной формулировке для сферического слоя. Более общая теорема Ньютона будет рассмотрена в гл. III.