и

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{fm}{R^2} \qquad (R > a),$$

откуда получим

$$\lim_{R \to a-0} \frac{\partial U}{\partial R} = 0, \qquad \lim_{R \to a+0} \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{fm}{a^2} = -4\pi f \delta.$$

Таким образом, нормальная (или радиальная) составляющая силы притяжения слоя действительно имеет разрыв первого рода в точке сферы M_0 и величина «скачка» равна $-4\pi f \delta$.

Легко проверить прямым вычислением производной $\frac{\partial U}{\partial R}$, что ее прямое значение в точке M_0 сферы равно нулю.

Полученные результаты показывают, что когда точка P находится внутри сферы Σ (т. е. во внутренней полости слоя), то она вовсе не испытывает притяжения со стороны слоя*), а когда точка P находится вне сферы Σ, то слой, лежащий на сфере, притягивает эту точку так, как будто вся масса слоя была сконцентрирована в его центре.

§ 4. Свойства потенциала двойного слоя

1. Рассмотрим поведение потенциала двойного слоя непрерывной плотности, распределенного на некоторой гладкой поверхности, в каждой точке которой существует, следовательно, определенная касательная плоскость.

Пусть P — точка, не лежащая на поверхности S. Потенциал двойного слоя, распределенного на этой поверхности с плотностью $\mu(M)$, определяется формулой

$$W(P) = f \iint_{(S)} \mu(M) \frac{\cos \varphi}{\Delta^2} d\sigma.$$

Рассмотрим сначала частный случай двойного слоя, распределенного на круглом диске с постоянной плотностью, и пусть точка P лежит на перпендикуляре к плоскости диска, проведенном через его центр (см. опять рис. 7). Считая, что положительная нормаль к плоскости диска совпадает с направлением оси $\overrightarrow{Oz}$, мы имеем

$$\Delta^2 = \rho^2 + z^2, \quad \cos \varphi = -\frac{z}{\Delta},$$

---

*) Этот результат представляет теорему Ньютона в ее частной формулировке для сферического слоя. Более общая теорема Ньютона будет рассмотрена в гл. III.

а поэтому формула для $W(P)$ дает

$$W(P) = -f\mu z \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \frac{2\rho\, d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}},$$

откуда находим

$$W(P) = 2\pi f\mu z \left[\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right],$$

что совпадает с точностью до постоянного множителя с выражением нормальной производной потенциала простого слоя, лежащего на том же диске. Следовательно, и конечный результат будет тот же, а именно, что функция W терпит разрыв первого рода, когда точка P, перемещаясь по нормали к диску, пересекает его плоскость.

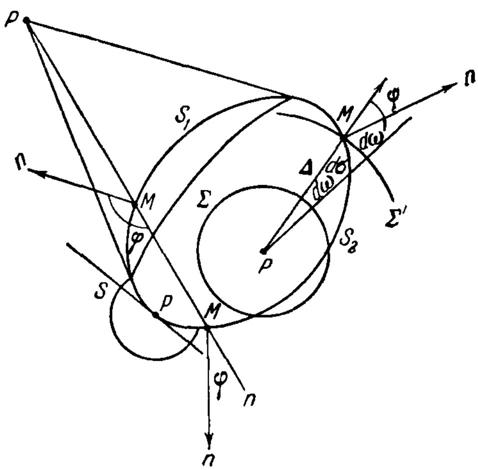

Рис. 10.

Мы придем к такому же результату и в общем случае, повторяя рассуждения, относящиеся к произвольному простому слою и используя рис. 8.

2. Рассмотрим еще случай однородного двойного слоя, распределенного на некоторой замкнутой поверхности S. Тогда имеет место следующая важная теорема, впервые доказанная Гауссом.

Теорема Гаусса. Потенциал двойного слоя постоянной плотности μ, лежащего на гладкой замкнутой поверхности S, равен нулю, когда точка P лежит вне поверхности S, равен $4\pi f\mu$, когда P лежит внутри S, и равен $2\pi f\mu$, когда P лежит на S.

Докажем сначала эту теорему чисто геометрическим путем. Пусть P есть внутренняя точка (рис. 10). Вообразим сферу Σ единичного радиуса с центром в P и обозначим через $d\omega$ элемент поверхности этой сферы. Построим затем бесконечно тонкий конус с вершиной в P, направляющей которого служит контур элемента $d\omega$ на сфере Σ. Площадь куска поверхности S, вырезаемого этим конусом, обозначим через $d\sigma$ и примем за элемент поверхности S.

Величина $d\omega$ будет вместе с тем телесным углом, под которым из точки P виден элемент $d\sigma$, принадлежащий S и соответствующий текущей точке M. Вообразим еще другую сферу Σ', также с центром в P, но с радиусом, равным расстоянию точки P от точки M, которое есть Δ. Элемент поверхности сферы Σ' можно рассматривать как проекцию элемента $d\sigma$ поверхности S на сферу Σ'. Обозначая величину этой проекции через $d\omega'$, имеем $d\omega' = \pm\cos\varphi d\sigma$, где φ — угол между направлением внешней нормали к S и направлением $\overrightarrow{PM}$, а знак выбирается так, чтобы элемент $d\omega'$ был положителен. С другой стороны, $d\omega' = \Delta^2 d\omega$, поэтому

$$d\omega = \frac{d\omega'}{\Delta^2} = \pm\frac{\cos\varphi}{\Delta^2}d\sigma. \tag{2.11}$$

Если точка P лежит, как предположено, внутри S и поверхность S выпукла по отношению к этой точке*), то (как это видно и на рис. 10) $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\varphi \geqslant 0$. Перенося теперь в выражении для W интегрирование с S на Σ, имеем с помощью (2.11)

$$W(P) = f\mu \iint\limits_{(\Sigma)} d\omega = 4\pi f\mu.$$

Пусть теперь точка P лежит вне поверхности S и пусть всякая прямая, проходящая через P, пересекает S только в двух точках (см. рис. 10). Опишем вокруг поверхности S касательный конус с вершиной в P. Линия касания этого конуса с поверхностью разделит S на две части, одна из которых ближе к P, а другая дальше от P и которые обозначим через S_1 и S_2.

Тогда

$$W(P) = f\mu \iint\limits_{(S_1)} \frac{\cos\varphi}{\Delta^2}d\sigma + f\mu \iint\limits_{(S_2)} \frac{\cos\varphi}{\Delta^2}d\sigma.$$

Но, как легко видеть, в точках S_1 угол φ тупой, а в точках S_2 угол φ — острый. Так как каждый из двух интегралов численно равен телесному углу, под которым из точки P видна вся поверхность S, то оба слагаемых в выражении для W будут равны по величине и противоположны по знаку, а поэтому интеграл, взятый по всей поверхности S, равен нулю.

Пусть, наконец, точка P лежит на поверхности S (см. рис. 10). Отметим прежде всего, что $W(P)$ имеет конечное значение. Действительно, подынтегральная функция равна, согласно формуле (2.11), элементарному телесному углу $d\omega$, под кото-

*) То есть всякая прямая, проведенная через точку P, пересекает поверхность S только в одной точке.

рым из точки P поверхности S виден произвольный элемент $d\sigma$ этой же поверхности, соответствующий текущей точке M.

Поэтому интеграл равен в этом случае тому телесному углу, под которым из точки P поверхности видна вся эта поверхность S. Так как, по условию, поверхность S гладкая, то в точке P существует определенная касательная плоскость и, следовательно, упомянутый телесный угол равен 2π, а значит, $W(P)=2\pi f\mu$.

Нетрудно рассмотреть таким же образом и случаи, когда поверхность S не является выпуклой относительно внутренней точки или когда некоторые прямые, проходящие через внешнюю точку, встречают поверхность более чем в двух точках.

Мы не будем рассматривать эти случаи, так как они включаются в другое доказательство теоремы Гаусса, которое можно назвать аналитическим и к которому мы сейчас переходим.

3. Определим потенциал однородного двойного слоя, лежащего на замкнутой поверхности S, формулой (1.21), т. е. ($\mu=$ $=\text{const}$)

$$W(P)=-f\mu\iint\limits_{(S)}\left(\alpha'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}+\beta'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}+\gamma'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}\right)d\sigma$$

и рассмотрим здесь сначала случай, когда точка P лежит вне S. Тогда функции

$$\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}=\frac{x-x'}{\Delta^3},\quad \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}=\frac{y-y'}{\Delta^3},\quad \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}=\frac{z-z'}{\Delta^3},$$

рассматриваемые как функции координат текущей точки M, конечны, непрерывны и однозначны в области D, ограниченной поверхностью S и на самой поверхности. Поэтому мы можем применить к нашему двойному интегралу известную в анализе формулу Остроградского и преобразовать с помощью этой формулы двойной интеграл в тройной, взятый по всей области D *).

Таким образом, получим

$$W(P)=-\iiint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2\frac{f\mu}{\Delta}}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\frac{f\mu}{\Delta}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\frac{f\mu}{\Delta}}{\partial z'^2}\right]d\tau.$$

---

*) Формула Остроградского пишется в следующем виде:

$$\iiint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\tau=$$
$$=\iint\limits_{(S)}[P\cos(n,\ x)+Q\cos(n,\ y)+R\cos(n,\ z)]\,d\sigma,$$

где P, Q, R суть функции конечные, непрерывные и однозначные вместе со своими частными производными первого порядка в области D и на ее границе S, а $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ суть направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Но согласно изложенному в § 2 функция $\frac{f\mu}{\Delta}$, рассматриваемая как функция координат точки M (текущей точки области D), удовлетворяет в области D уравнению Лапласа, так что

$$\frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial z'^2}=0.$$

Следовательно, $W(P)=0$ вне поверхности S. Пусть теперь точка P лежит внутри S. Тогда непосредственно применить формулу Остроградского нельзя, так как функции $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}$, $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}$, $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}$ обращаются в бесконечность в точке P.

Окружим тогда точку P сферой Σ малого радиуса ε и рассмотрим интеграл

$$W'(P)=-f\mu\iint\limits_{(S+\Sigma)}\left(\alpha'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}+\beta'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}+\gamma'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}\right)d\sigma,$$

взятый по совокупности двух замкнутых поверхностей S и Σ. В области D', заключенной между этими двумя поверхностями, для которой P есть внешняя точка, функции $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}$, $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}$, $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}$ удовлетворяют условиям теоремы Остроградского и, следовательно, интеграл $W'(P)$ равен нулю. Но мы имеем

$$W'(P)=W(P)+W_\varepsilon(P),$$

где $W_\varepsilon(P)$ есть интеграл, взятый по поверхности сферы Σ с центром в точке P, который легко вычислить. Действительно,

$$W_\varepsilon(P)=f\mu\iint\limits_{(\Sigma)}\frac{\cos\varphi}{\Delta^2}\,d\sigma,$$

но на сфере Σ имеем $\cos\varphi=-1$ и $\Delta=\varepsilon$, следовательно,

$$W_\varepsilon(P)=-\frac{f\mu}{\varepsilon^2}\iint\limits_{(\Sigma)}d\sigma=-4\pi f\mu,$$

откуда

$$W(P)=4\pi f\mu.$$

Пусть, наконец, точка P лежит на поверхности S. Построим опять сферу Σ с центром в точке P и радиуса ε и рассмотрим область D', заключенную между поверхностью S и частью сферы Σ, погруженной в область D. Пусть S' есть та часть поверхности S, которой не принадлежит точка P, и Σ' — та часть поверхности сферы Σ, которая погружена в область D. Тогда, так же как и выше, найдем

$$W'(P) = -f\mu \iint\limits_{(S'+\Sigma')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma = 0$$

при всяком, достаточно малом ε. Поэтому также

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W'(P) = 0,$$

но

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -f\mu \iint\limits_{(S')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma \right\} = W(P),$$

а

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -f\mu \iint\limits_{(\Sigma')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma \right\} = -2\pi f\mu,$$

следовательно,

$$W(P) = 2\pi f\mu$$

и теорема Гаусса доказана полностью.

Заметим, что при этом доказательстве мы не делали никаких частных предположений относительно свойств поверхности S и наше доказательство остается справедливым во всех тех случаях, когда имеет место теорема Остроградского.

§ 5. Силовая функция однородного шара

В § 3 мы рассмотрели свойства притяжения для случая, когда притягиваемая точка неограниченно приближается к какой-либо точке притягивающей материальной линии или материальной поверхности.

Мы показали, что в точках материальной линии и силовая функция и составляющие силы притяжения имеют разрыв второго рода, а во внутренних точках материальной поверхности силовая функция остается непрерывной, в то время как составляющие силы притяжения вообще претерпевают разрыв первого рода.

Теперь мы перейдем к подробиому изучению наиболее важного для астрономии и, в частности, для небесной механики, случая, когда притягивающее тело имеет три измерения, т. е. является «телом» в собственном смысле этого слова.

1. В этом параграфе мы разберем сначала простой частный случай, когда притягивающее тело есть однородный шар T радиуса a с центром в точке $O(\xi, \eta, \zeta)$.

Нетрудно найти силовую функцию шара, используя результаты, полученные в конце § 3. Действительно, рассмотрим