верхности сферы Σ, которая погружена в область D. Тогда, так же как и выше, найдем

$$W'(P) = -f\mu \iint\limits_{(S'+\Sigma')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma = 0$$

при всяком, достаточно малом ε. Поэтому также

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W'(P) = 0,$$

но

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -f\mu \iint\limits_{(S')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma \right\} = W(P),$$

а

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -f\mu \iint\limits_{(\Sigma')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma \right\} = -2\pi f\mu,$$

следовательно,

$$W(P) = 2\pi f\mu$$

и теорема Гаусса доказана полностью.

Заметим, что при этом доказательстве мы не делали никаких частных предположений относительно свойств поверхности S и наше доказательство остается справедливым во всех тех случаях, когда имеет место теорема Остроградского.

§ 5. Силовая функция однородного шара

В § 3 мы рассмотрели свойства притяжения для случая, когда притягиваемая точка неограниченно приближается к какой-либо точке притягивающей материальной линии или материальной поверхности.

Мы показали, что в точках материальной линии и силовая функция и составляющие силы притяжения имеют разрыв второго рода, а во внутренних точках материальной поверхности силовая функция остается непрерывной, в то время как составляющие силы притяжения вообще претерпевают разрыв первого рода.

Теперь мы перейдем к подробному изучению наиболее важного для астрономии и, в частности, для небесной механики, случая, когда притягивающее тело имеет три измерения, т. е. является «телом» в собственном смысле этого слова.

1. В этом параграфе мы разберем сначала простой частный случай, когда притягивающее тело есть однородный шар T радиуса a с центром в точке $O(\xi, \eta, \zeta)$.

Нетрудно найти силовую функцию шара, используя результаты, полученные в конце § 3. Действительно, рассмотрим внутри шара T сферу Σ переменного радиуса r, с центром в точке O. Тогда силовая функция простого слоя, лежащего на этой сфере, определится формулой § 3, где вместо a нужно написать r, а под δ надо подразумевать объемную плотность шара.

Рассматривая весь шар как «расслоенный» на бесчисленное множество концентрических сферических слоев, мы получим силовую функцию всего шара, произведя еще одно интегрирование по r.

Пусть точка P находится вне шара, т. е. $R>a$. Тогда имеем

$$U(P)=\frac{4\pi f\delta}{R}\int_0^a r^2\,dr=\frac{fm}{R},$$

где m — масса всего шара, т. е. $m={}^4/_3\pi a^3\delta$.

Пусть, далее, точка P находится внутри шара T, т. е. $0\leqslant R<a$. Разбивая промежуток интегрирования по r, т. е. $(0, a)$ на два промежутка $(0, R)$ и (R, a), мы будем иметь

$$U(P)=4\pi f\delta\left\{\frac{1}{R}\int_0^R r^2\,dr+\int_R^a r\,dr\right\}=\frac{fm}{2a^3}(3a^2-R^2).$$

Отсюда видно, что силовая функция шара на **внутреннюю точку** остается конечной и непрерывной, причем свойство непрерывности сохраняется и при переходе точки P из внешнего пространства во внутреннее или наоборот.

Найдем теперь радиальную составляющую силы притяжения шара на точку P. Непосредственное вычисление или же дифференцирование силовой функции по R дает

$$\frac{\partial U}{\partial R}=-\frac{fm}{a^3}R\qquad(0\leqslant R<a)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial R}=-\frac{fm}{R^2}\qquad(R>a).$$

Отсюда видно, что радиальная составляющая силы притяжения также остается конечной и непрерывной внутри шара и на его поверхности. Этим свойством обладают также проекции силы притяжения по любому направлению. Действительно, примем это направление за направление оси абсцисс системы координат $O'xyz$ с началом в заданной точке O'. Тогда

$$R^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

и так как

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x-\xi}{R}\frac{\partial U}{\partial R},$$

то составляющая X по оси $O'x$ также конечна и непрерывна внутри шара и на его поверхности.

Из полученных результатов следует, между прочим, что однородный шар притягивает внешнюю точку P так, как будто бы вся масса шара сконцентрирована в его центре; если же точка P находится внутри шара, то она притягивается к его центру с силой, прямо пропорциональной расстоянию до центра (закон Гука).

2. Чтобы закончить исследование притяжения однородного шара, вычислим еще оператор Лапласа для силовой функции U, когда точка P находится внутри шара.

Согласно предыдущему, мы имеем при $0 \leqslant R \leqslant a$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{fm}{a^3}(x - \xi),$$

откуда

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{fm}{a^3},$$

и, следовательно,

$$\nabla U = -\frac{3fm}{a^3} = -4\pi f \delta.$$

Таким образом, силовая функция уже не удовлетворяет внутри шара уравнению Лапласа, а является решением некоторого другого уравнения, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi f \delta$$

и называется уравнением Пуассона.

Мы видим на этом простом примере, что свойства силовой функции трехмерного тела на внутреннюю точку отличаются от таких же свойств материальной линии или материальной поверхности.

§ 6. Свойства притяжения внутри произвольного трехмерного тела

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда тело имеет произвольную форму и произвольную структуру.

Мы будем предполагать только, что плотность тела $\delta(M)$ есть непрерывная функция текущей точки M, но и это допущение не всегда будет являться существенным и в ряде случаев его можно заменить несколько более общим предположением.

1. Итак, рассмотрим силовую функцию ньютоновского притяжения некоторого трехмерного тела T, линейные размеры которого конечны и плотность которого $\delta(x', y', z')$ есть непрерывная функция координат x', y', z' точки M.

Тогда силовая функция U на точку $P(x, y, z)$ единичной массы *) и составляющие X, Y, Z по осям произвольно выбранной,

*) Если масса точки есть μ, то нужно ввести множитель.