Из полученных результатов следует, между прочим, что однородный шар притягивает внешнюю точку P так, как будто бы вся масса шара сконцентрирована в его центре; если же точка P находится внутри шара, то она притягивается к его центру с силой, прямо пропорциональной расстоянию до центра (закон Гука).

2. Чтобы закончить исследование притяжения однородного шара, вычислим еще оператор Лапласа для силовой функции U, когда точка P находится внутри шара.

Согласно предыдущему, мы имеем при $0 \leqslant R \leqslant a$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{fm}{a^3}(x - \xi),$$

откуда

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{fm}{a^3},$$

и, следовательно,

$$\nabla U = -\frac{3fm}{a^3} = -4\pi f\delta.$$

Таким образом, силовая функция уже не удовлетворяет внутри шара уравнению Лапласа, а является решением некоторого другого уравнения, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi f\delta$$

и называется уравнением Пуассона.

Мы видим на этом простом примере, что свойства силовой функции трехмерного тела на внутреннюю точку отличаются от таких же свойств материальной линии или материальной поверхности.

§ 6. Свойства притяжения внутри произвольного трехмерного тела

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда тело имеет произвольную форму и произвольную структуру.

Мы будем предполагать только, что плотность тела $\delta(M)$ есть непрерывная функция текущей точки M, но и это допущение не всегда будет являться существенным и в ряде случаев его можно заменить несколько более общим предположением.

1. Итак, рассмотрим силовую функцию ньютоновского притяжения некоторого трехмерного тела T, линейные размеры которого конечны и плотность которого $\delta(x', y', z')$ есть непрерывная функция координат x', y', z' точки M.

Тогда силовая функция U на точку $P(x, y, z)$ единичной массы *) и составляющие X, Y, Z по осям произвольно выбранной,

*) Если масса точки есть μ, то нужно ввести множитель.

но неизменной системы координат определятся формулами*) (см. § 5 гл. I)

$$U(P) = f \iiint\limits_{(T)} \frac{\delta(M)\, d\tau}{\Delta}, \tag{2.12}$$

и

$$X(P) = f \iiint\limits_{(T)} \frac{\delta(M)(x'-x)\, d\tau}{\Delta^3}, \tag{2.13}$$

где

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Интегралы в формулах (2.12) и (2.13) оказываются несобственными, когда точка P является частью тела, а поэтому прежде всего необходимо исследовать эти интегралы на сходимость, т. е. выяснить, имеют ли они конечные значения во внутренних точках рассматриваемого тела.

В предыдущем параграфе было показано, что в случае однородного шара выражения (2.12) и (2.13) действительно остаются конечными и непрерывными, когда точка P находится внутри шара. Эти результаты без труда устанавливаются также и для случая произвольного тела, что сразу же делается ясным при помощи следующих простых соображений.

Пусть точка P есть внутренняя точка тела T. Вообразим сферу Σ с центром в P и настолько малого (но конечного!) радиуса ρ, что вся эта сфера целиком погружена в область пространства, занимаемую телом.

По непрерывности плотности δ значения функции U и X в точке P будут весьма мало отличаться от их значений при постоянной плотности в сфере Σ. Но силовая функция и составляющие силы притяжения, как было показано в § 5, конечны и непрерывны внутри однородного шара. А так как для остальной части тела T точка P является внешней, то силовая функция и составляющая силы притяжения этой остальной части заведомо конечны и непрерывны. Следовательно, и для всего тела функции U и X также будут конечны и непрерывны.

Приведенное рассуждение носит скорее описательный характер и хотя обладает наглядностью, все же не может заменить строгого доказательства, к которому теперь мы и переходим.

Обозначая, как и ранее, через α, β, γ направляющие косинусы прямой, выходящей из точки P и идущей к точке M, имеем

$$x' = x + \alpha\Delta, \quad y' = y + \beta\Delta, \quad z' = z + \gamma\Delta. \tag{2.14}$$

Эти направляющие косинусы можно, очевидно, рассматривать как координаты точки M' на сфере Ω единичного радиуса с центром в точке P, в которой прямая PM пересекает эту

*) Здесь и далее мы будем для сокращения рассматривать только одну из трех составляющих силы притяжения, например, $X(P)$.

сферу, а формулы (2.14) — как формулы перехода от текущих координат x', y', z' к новым переменным интегрирования α, β, γ, Δ, причем

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Переходя к этим новым переменным, мы представим U и X в следующем виде ($d\tau=\Delta^2 d\Delta d\omega$):

$$U(P)=f\iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^R \delta(x+\alpha\Delta,\ y+\beta\Delta,\ z+\gamma\Delta)\,\Delta\, d\Delta \tag{2.15}$$

и

$$X(P)=f\iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^R \delta(x+\alpha\Delta,\ y+\beta\Delta,\ z+\gamma\Delta)\,\alpha\, d\Delta, \tag{2.16}$$

где $d\omega$ есть элемент площади сферы Ω единичного радиуса, а R — переменное расстояние от точки P до точек поверхности S, ограничивающей тело (рис. 11).

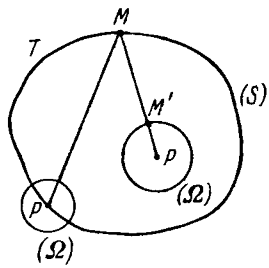

Рис. 11.

В формулах (2.15) и (2.16) подынтегральные функции не содержат множителем Δ^{-1}, а поэтому остаются конечными во всех точках области интегрирования. Так как область интегрирования также конечна (тело имеет конечные размеры!), то функции U и X, Y, Z *имеют конечные значения* в каждой внутренней точке тела.

Если точка P лежит на поверхности S тела, то все эти функции также имеют конечные значения, которые определяются теми же формулами (2.15) и (2.16), но областью интегрирования в двойном интеграле будет теперь не вся сфера Ω, а только ее часть, погруженная в тело T *).

*) Заметим, что если тело T является однородным, т. е. если

$$\delta(M)=\text{const},$$

то формула (2.15) даст сразу

$$U(P)=\frac{1}{2}f\iint\limits_{(\Omega)} R^2\, d\omega,$$

откуда, перенося интегрирование обратно на поверхность S, получаем следующую формулу, называемую *формулой Гаусса*:

$$U(P)=\frac{1}{2}f\iint\limits_{(S)} \cos\varphi\, d\sigma,$$

представляющую силовую функцию однородного тела двойным интегралом, распространенным по поверхности тела.

Замечательное применение этой формулы можно найти в мемуаре С. В. Ковалевской, посвященному вопросу об устойчивости кольца Сатурна. См. сборник: С. В. *Ковалевская*, Научные работы, 1948.

Примечание. Нетрудно заметить, что функции $U(P)$ и $X(P)$ остаются также конечными и в том случае, когда плотность $\delta(M)$ не непрерывна внутри тела T, а имеет точки, линии или поверхности разрыва первого рода.

2. Покажем теперь, возвращаясь к предположению непрерывности плотности $\delta(M)$, что силовая функция U и составляющие силы притяжения X, Y, Z изменяются непрерывно при непрерывном перемещении точки P внутри тела, или когда точка P переходит из внешнего пространства внутрь тела либо наоборот.

Пусть точка P лежит внутри тела или на его поверхности S. Обозначим через P' точку, близкую к точке P и лежащую либо внутри, либо вне тела, либо на его поверхности. Мы хотим доказать, что

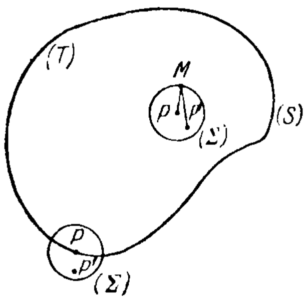

Рис. 12.

$$\lim_{P' \to P} U(P') = U(P)$$

и

$$\lim_{P' \to P} X(P') = X(P).$$

Для доказательства вообразим сферу Σ с центром в точке P малого радиуса ρ и допустим, что точка P' находится внутри этой сферы (рис. 12).

Обозначим через T_1 ту часть тела T, которая заключена внутри сферы Σ, а через T_2 — остальную часть тела T. Далее, обозначим через U_1 и X_1 силовую функцию и составляющую силы притяжения тела T_1, а через U_2 и X_2 — такие же величины, относящиеся к телу T_2. Тогда имеем

$$U(P) = U_1(P) + U_2(P), \qquad X(P) = X_1(P) + X_2(P)$$

и, следовательно, можем написать

$$U(P) - U(P') = U_1(P) - U_1(P') + U_2(P) - U_2(P') \quad (2.17)$$

и

$$X(P) - X(P') = X_1(P) - X_1(P') + X_2(P) - X_2(P'). \quad (2.18)$$

Переходим теперь к оценкам числовых значений отдельных слагаемых в этих формулах.

Применяя формулы (2.15) и (2.16) к телу T_1, имеем, обозначая через $\bar{\delta}$ наибольшее значение функции δ в сфере Σ, следующие неравенства:

$$U_1(P) < f\bar{\delta} \int\limits_{(\Omega)}\int d\omega \int\limits_0^{\rho} \Delta\, d\Delta = \frac{1}{2} f\rho^2\bar{\delta} \int\limits_{(\Omega)}\int d\omega$$

и

$$|X_1(P)| < f\delta \iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^\rho |\alpha|\, d\Delta < f\rho\bar{\delta} \iint\limits_{(\Omega)} d\omega.$$

Но

$$\iint\limits_{(\Omega)} d\omega \leqslant 4\pi$$

(интеграл равен 4π, если точка P лежит внутри тела, и меньше 4π, если точка P лежит на поверхности S). Поэтому

$$U_1(P) < 2\pi f\bar{\delta}\rho^2, \quad |X_1(P)| < 4\pi f\bar{\delta}\rho.$$

Точно так же найдем

$$U_1(P') < f\bar{\delta} \iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^R \Delta\, d\Delta = \frac{1}{2} f\bar{\delta}R^2 \iint\limits_{(\Omega)} d\omega < 8\pi f\bar{\delta}\rho^2$$

и

$$|X_1(P')| < f\bar{\delta} \iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^R |\alpha|\, d\Delta < f\bar{\delta}R \iint\limits_{(\Omega)} d\omega < 8\pi f\bar{\delta}\rho,$$

так как R не превосходит диаметра сферы 2ρ.

Пусть теперь ε — любое, сколь угодно малое положительное число. Выберем радиус сферы ρ (внутри которой находится точка P') согласно условию

$$\rho^2 < \rho < \frac{\varepsilon}{24\pi f\bar{\delta}}.$$

Тогда для всех точек P', лежащих внутри сферы Σ, будут выполняться неравенства

$$U_1(P) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad U_1(P') < \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$|X_1(P)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |X_1(P')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь обратим внимание на то, что точки P и P', находясь внутри сферы Σ, лежат в н е тела T_2, где и силовая функция и составляющие силы притяжения непрерывны, как показано в § 1 этой главы. Поэтому можно указать такую сферу Σ' с центром в точке P и содержащуюся внутри сферы Σ, что для всех точек P', лежащих внутри Σ', будут выполняться следующие неравенства:

$$|U_2(P) - U_2(P')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |X_2(P) - X_2(P')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Обращаясь затем к формулам (2.17) и (2.18) и имея в виду полученные оценки, мы найдем

$$|U(P)-U(P')|<\varepsilon, \quad |X(P)-X(P')|<\varepsilon,$$

что, в сущности, и требовалось доказать.

Таким образом, мы установили следующие свойства притяжения:

Свойство 1. Силовая функция тела конечных размеров и непрерывной плотности остается конечной, однозначной и непрерывной, когда притягиваемая точка находится внутри тела или на его поверхности.

Свойство 2. Составляющие силы притяжения тела конечных размеров и непрерывной плотности также остаются конечными, однозначными и непрерывными, когда притягиваемая точка находится внутри тела или на его поверхности.

3. Перейдем к рассмотрению следующего свойства и докажем, что проекция на любую ось силы притяжения, действующей на внутреннюю точку тела, равна соответствующей частной производной от силовой функции (т. е. производной по направлению взятой оси).

Принимая ось проекций за ось абсцисс системы координат $Oxyz$, покажем, что

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Пусть $P(x, y, z)$ есть внутренняя точка тела, в которой попрежнему сосредоточена единичная точечная масса.

Вообразим опять сферу Σ с центром в P, настолько малого радиуса ρ, что вся эта сфера целиком погружена в тело T. Возьмем теперь точку $P'(x+h, y, z)$ тела, лежащую внутри сферы Σ; нужно доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(P')-U(P)}{h}=X(P),$$

или (так как X не зависит от h) что

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{U'(P)-U(P)}{h}-X(P)\right]=0.$$

Положим для сокращения

$$H=\frac{U'(P)-U(P)}{h}-X(P)$$

и покажем, что H (величина которой, очевидно, не зависит от ρ) стремится к нулю при $h\to 0$.

Используя те же обозначения, что и выше, можем представить величину H в виде

$$H=H_1+H_2,$$

где H_1 есть значение H для части T_1 тела, а H_2 — для части T_2, т. е.

$$H_1=\frac{U_1(P')-U_1(P)}{h}-X_1(P)$$

и

$$H_2=\frac{U_2(P')-U_2(P)}{h}-X_2(P).$$

Рассмотрим каждое слагаемое величины H в отдельности. Прежде всего имеем

$$|H_1|\leqslant\left|\frac{U_1(P')-U_1(P)}{h}\right|+|X_1(P)|.$$

Так как оценка для $|X_1(P)|$ уже получена выше, то остается оценить первое слагаемое. Но мы имеем

$$\frac{U_1(P')-U_1(P)}{h}=f\iiint\limits_{(T_1)}\left(\frac{1}{\Delta'}-\frac{1}{\Delta}\right)\frac{\delta\,d\tau}{h},$$

где Δ' — расстояние точки P' до текущей точки M тела T_1. С помощью неравенств *)

$$|\Delta'-\Delta|<h,\qquad \frac{2}{\Delta\Delta'}\leqslant\frac{1}{\Delta'^2}+\frac{1}{\Delta^2}$$

находим

$$\left|\frac{U_1(P')-U_1(P)}{h}\right|<\frac{1}{2}\left\{f\iiint\limits_{(T_1)}\frac{\delta\,d\tau}{\Delta^2}+f\iiint\limits_{(T_1)}\frac{\delta\,d\tau}{\Delta'^2}\right\}=\frac{I+I'}{2}$$

(через I и I' обозначены для краткости первое и второе слагаемые в скобках).

Так как I отличается от X только отсутствием множителя α под знаком интеграла, то, рассуждая так же, как и выше при получении оценки для $|X(P)|$, найдем

$$I<4\pi f\bar{\delta}\rho,\quad I'<8\pi f\bar{\delta}\rho.$$

Следовательно, будем иметь

$$|H_1|<10\pi f\bar{\delta}\rho.$$

Назначая теперь сколь угодно малое положительное число ε, выберем радиус сферы ρ из условия

$$\rho<\frac{\varepsilon}{20\pi f\bar{\delta}}.$$

---

*) Первое из этих неравенств очевидно, а второе легко вывести. В самом деле, из $(\Delta'-\Delta)^2>0$ выводим $2\Delta\Delta'<\Delta'^2+\Delta^2$, деля которое на $\Delta'^2\Delta^2$, мы получим требуемое неравенство.

Тогда для всякой точки P', для которой $|h|<\rho$, будем иметь

$$|H_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя затем к оценке H_2, заметим, что точки P и P' являются внешними для тела T_2, следовательно, вследствие непрерывности силовой функции во внешнем пространстве, H_2 заведомо стремится к нулю при $P'\to P$, т.е. мы можем указать такую сферу Σ' с центром в P и содержащуюся внутри сферы Σ, что для всех точек P', лежащих внутри Σ', будем иметь $|H_2|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Теперь находим

$$|H|\leqslant|H_1|+|H_2|<\varepsilon$$

и это неравенство будет справедливо для всякой точки P', достаточно близкой к P, а поэтому

$$\lim_{P'\to P} H=0,$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве мы предполагали, что точка P лежит внутри тела T, но очевидно, что доказанное будет справедливо и в том случае, когда точка P находится на поверхности S тела. В результате мы можем сформулировать следующее свойство:

Свойство 3. Если тело имеет конечные размеры и плотность его непрерывна, то проекция силы притяжения на любое направление равна производной от силовой функции по этому направлению. В частности, формулы

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

остаются справедливыми, когда притягиваемая точка лежит внутри или на поверхности тела.

4. До сих пор мы рассматривали силовую функцию U и составляющие силы притяжения как функции только координат точки P, предполагая таким образом, что параметры, определяющие положение и ориентацию тела, суть величины постоянные. Но, разумеется, что установленные свойства будут справедливы и в общем случае, так как координаты точки P и параметры тела T суть величины, не зависящие друг от друга.

Свойства, нами установленные, будут справедливы также и для составляющих силы притяжения, действующей на тело T, и ее момента. Это вытекает непосредственно из формул (2.3) и (2.4), в которых нужно рассматривать ξ, η, ζ, ψ, φ, ϑ как переменные независимые. Поэтому будут справедливы также следующие свойства.

Свойство 4. Если тело T имеет конечные размеры и непрерывную плотность, то составляющие силы притяжения материальной точки, действующей на это тело, и составляющие момента силы притяжения относительно произвольно взятого центра приведения остаются конечными, однозначными и непрерывными, когда точка P находится внутри или на поверхности тела.

Свойство 5. Формулы

$$\Xi=\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \mathrm{H}=\frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \mathrm{Z}=\frac{\partial U}{\partial \zeta},$$
$$L_{\psi}=\frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad L_{\varphi}=\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad L_{\vartheta}=\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$$

остаются справедливыми, когда притягивающая точка P находится внутри или на поверхности притягиваемого тела T.

Вообразим теперь два произвольных трехмерных тела T_1 и T_2, которые имеют некоторую общую часть T. Каждую точку M, принадлежащую этой общей части, можно рассматривать и как внутреннюю точку для обоих тел, и как внешнюю точку для тел $T_1 - T$ и $T_2 - T$. И в том и в другом случае взаимная силовая функция и составляющие сил притяжения, и составляющие моментов этих сил будут оставаться конечными, однозначными и непрерывными функциями параметров, определяющих положения и ориентации этих тел.

Формулы (2.10), выражающие составляющие сил, действующих на тела T_1 и T_2, и составляющие моментов этих сил относительно произвольно выбранных центров приведения (но жестко связанных с телами T_1 и T_2 соответственно), будут справедливы и в том случае, когда тела T_1 и T_2 имеют некоторую общую часть.

§ 7. Уравнение Пуассона. Формулы Римана

В конце § 5 этой главы было показано, что силовая функция однородного шара удовлетворяет во внутренних точках шара уравнению, называемому уравнением Пуассона.

Мы покажем теперь, что это свойство сохраняется и для достаточно произвольного трехмерного тела.

Для этого выведем сначала некоторые вспомогательные формулы.

1. Пусть имеем тело T с конечными размерами и с непрерывной плотностью $\delta(x', y', z')$. Предположим, сверх того, что