ные независимые. Поэтому будут справедливы также следующие свойства.

Свойство 4. Если тело T имеет конечные размеры и непрерывную плотность, то составляющие силы притяжения материальной точки, действующей на это тело, и составляющие момента силы притяжения относительно произвольно взятого центра приведения остаются конечными, однозначными и непрерывными, когда точка P находится внутри или на поверхности тела.

Свойство 5. Формулы

$$\Xi=\frac{\partial U}{\partial \xi},\quad \mathrm{H}=\frac{\partial U}{\partial \eta},\quad \mathrm{Z}=\frac{\partial U}{\partial \zeta},$$
$$L_{\psi}=\frac{\partial U}{\partial \psi},\quad L_{\varphi}=\frac{\partial U}{\partial \varphi},\quad L_{\vartheta}=\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$$

остаются справедливыми, когда притягивающая точка P находится внутри или на поверхности притягиваемого тела T.

Вообразим теперь два произвольных трехмерных тела T_1 и T_2, которые имеют некоторую общую часть T. Каждую точку M, принадлежащую этой общей части, можно рассматривать и как внутреннюю точку для обоих тел, и как внешнюю точку для тел T_1-T и T_2-T. И в том и в другом случае взаимная силовая функция и составляющие сил притяжения, и составляющие моментов этих сил будут оставаться конечными, однозначными и непрерывными функциями параметров, определяющих положения и ориентации этих тел.

Формулы (2.10), выражающие составляющие сил, действующих на тела T_1 и T_2, и составляющие моментов этих сил относительно произвольно выбранных центров приведения (но жестко связанных с телами T_1 и T_2 соответственно), будут справедливы и в том случае, когда тела T_1 и T_2 имеют некоторую общую часть.

§ 7. Уравнение Пуассона. Формулы Римана

В конце § 5 этой главы было показано, что силовая функция однородного шара удовлетворяет во внутренних точках шара уравнению, называемому уравнением Пуассона.

Мы покажем теперь, что это свойство сохраняется и для достаточно произвольного трехмерного тела.

Для этого выведем сначала некоторые вспомогательные формулы.

1. Пусть имеем тело T с конечными размерами и с непрерывной плотностью $\delta(x', y', z')$. Предположим, сверх того, что

функция δ имеет непрерывные частные производные первого порядка по переменным x', y', z'.

Тогда мы можем написать

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\delta}{\partial x'}-\frac{\delta}{\Delta^2}\frac{\partial\Delta}{\partial x'}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\delta}{\partial x'}-\delta\frac{x'-x}{\Delta^3},$$

и составляющая силы притяжения тела, действующей на точку единичной массы, представится формулой

$$X=f\int\underset{(T)}{\int}\int\delta\frac{x'-x}{\Delta^3}\,d\tau=$$
$$=-f\int\underset{(T)}{\int}\int\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)d\tau+f\int\underset{(T)}{\int}\int\frac{\partial\delta}{\partial x'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta}.$$

Если точка P лежит вне тела T, то функция δ/Δ удовлетворяет в области D, занимаемой телом, всем условиям теоремы Остроградского *), а поэтому, применяя формулу Остроградского к первому интегралу правой части последнего равенства, мы имеем

$$\int\underset{(D)}{\int}\int\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)d\tau=\underset{(S)}{\int\int}\frac{\delta\alpha'}{\Delta}\,d\sigma,$$

где α' — косинус угла, образованного направлением внешней нормали к поверхности S с положительным направлением оси абсцисс. Теперь выражение для X напишется в виде

$$X=-f\underset{(S)}{\int\int}\frac{\delta\alpha'}{\Delta}\,d\sigma+f\int\underset{(T)}{\int}\int\frac{\partial\delta}{\partial x'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta}.$$

Пусть затем точка P лежит внутри области интегрирования D. В этом случае мы уже не можем непосредственно применить формулу Остроградского, так как функция δ/Δ обращается в бесконечность в точке P области D.

Чтобы иметь возможность применить формулу Остроградского, вообразим опять сферу Σ с центром в P, настолько малого радиуса ρ, что вся эта сфера целиком находится в области D. Тогда в области D_2, заключенной между поверхностью S тела и поверхностью сферы Σ, функция δ/Δ удовлетворяет условиям теоремы Остроградского, и мы можем написать

$$\int\underset{(D_2)}{\int}\int\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)d\tau=\underset{(S)}{\int\int}\frac{\delta\alpha'}{\Delta}\,d\sigma+\underset{(\Sigma)}{\int\int}\frac{\delta\bar{\alpha}}{\Delta}\,d\sigma,$$

где $\bar{\alpha}$ — направляющий косинус внешней по отношению к области D_2 нормали сферы Σ.

*) См. сноску на стр. 67.

Перенося во втором интеграле интегрирование на поверхность сферы Ω единичного радиуса с центром в P, мы имеем $d\sigma=\rho^2 d\omega$, и поэтому

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\delta\bar{\alpha}}{\Delta}\,d\sigma=\rho\iint\limits_{(\Omega)}\delta\bar{\alpha}\,d\omega.$$

Правая часть этого равенства имеет пределом нуль при $\rho\to 0$. Так как одновременно $D_2\to D$, то мы получим в пределе

$$\iiint\limits_{(D)}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)d\tau=\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\alpha'}{\Delta}\,d\sigma,$$

что дает для X такую же формулу, как и в случае внешней точки. Так как эти рассуждения справедливы и для двух других составляющих силы притяжения, то мы можем написать

$$\left.\begin{aligned}
X&=-f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\alpha'}{\Delta}\,d\sigma+f\iiint\limits_{(T)}\frac{\partial\delta}{\partial x'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta},\\
Y&=-f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\beta'}{\Delta}\,d\sigma+f\iiint\limits_{(T)}\frac{\partial\delta}{\partial y'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta},\\
Z&=-f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\gamma'}{\Delta}\,d\sigma+f\iiint\limits_{(T)}\frac{\partial\delta}{\partial z'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.19)$$

Эти формулы, одинаково справедливые и для внешней и для внутренней точки, называются **формулами Римана**.

Заметим, что интегралы, стоящие в правых частях этих формул, можно рассматривать, если угодно, как силовые функции тел, обладающих соответственно плотностями $\frac{\partial\delta}{\partial x'}$, $\frac{\partial\delta}{\partial y'}$, $\frac{\partial\delta}{\partial z'}$, и как силовые функции простых слоев, лежащих на поверхности S, с плотностями $-\delta\alpha'$, $-\delta\beta'$, $-\delta\gamma'$ соответственно. Поэтому каждая составляющая силы притяжения может рассматриваться как сумма силовой функции некоторого трехмерного тела и силовой функции некоторой материальной поверхности *).

2. Применим формулы Римана для вычисления вторых частных производных от силовой функции U и составления оператора Лапласа ∇U.

*) Заметим, что если тело T однородно, т. е. $\delta(M)=\text{const}$, то формулы (2.19) дают

$$X=-f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\alpha'}{\Delta}\,d\sigma,\quad Y=-f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\beta'}{\Delta}\,d\sigma,\quad Z=-f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta\gamma'}{\Delta}\,d\sigma.$$

Эти формулы называются **формулами Гаусса**

Заметим, что мы можем дифференцировать интегралы в формулах (2.19) по координатам точки P обычным образом, так как для любого положения этой точки в пространстве все эти интегралы (как представляющие силовые функции!) суть интегралы сходящиеся. Имея, кроме того, в виду, что для любой точки пространства $X=\frac{\partial U}{\partial x}$, мы можем написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial X}{\partial x}=-f\iint\limits_{(S)}\delta\alpha'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}d\sigma+f\iiint\limits_{(T)}\frac{\partial\delta}{\partial x'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}d\tau$$

и аналогично для двух других составляющих. Поэтому оператор Лапласа для функции U определится формулой

$$\nabla U=-f\iint\limits_{(S)}\delta\left\{\alpha'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}+\beta'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}+\gamma'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}\right\}d\sigma+$$
$$+f\iiint\limits_{(T)}\left\{\frac{\partial\delta}{\partial x'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}+\frac{\partial\delta}{\partial y'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}+\frac{\partial\delta}{\partial z'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}\right\}d\tau.$$

Так как

$$\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}=\frac{\alpha}{\Delta^2},\quad \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}=\frac{\beta}{\Delta^2},\quad \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}=\frac{\gamma}{\Delta^2},$$

где α, β, γ суть направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM}$, то

$$\alpha'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}+\beta'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}+\gamma'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'}{\Delta^2}=\frac{\cos\varphi}{\Delta^2},$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial x'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}+\frac{\partial\delta}{\partial y'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}+\frac{\partial\delta}{\partial z'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}=\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial\Delta},$$

где φ, как и ранее, есть угол, образованный внешней нормалью к поверхности S с направлением $\overrightarrow{PM}$, а $\frac{\partial\delta}{\partial\Delta}$ есть производная от функции $\delta(M)$ по направлению прямой, выходящей из точки P и идущей к M.

Теперь имеем

$$\nabla U=-f\iint\limits_{(S)}\delta\frac{\cos\varphi}{\Delta^2}d\sigma+f\iiint\limits_{(T)}\frac{\partial\delta}{\partial\Delta}\frac{d\tau}{\Delta^2};$$

переходя во втором интеграле к системе координат с началом в точке P, получим по формуле, подобной (2.15),

$$\iiint\limits_{(T)}\frac{\partial\delta}{\partial\Delta}\frac{d\tau}{\Delta^2}=\iint\limits_{(\Omega)}d\omega\int\limits_0^R\frac{\partial\delta}{\partial\Delta}d\Delta,$$

причем R обозначает расстояние от точки P до текущей точки M поверхности тела. Так как при $R=0$ точка M совпадает с точкой P, то

$$\int_0^R \frac{\partial \delta}{\partial \Delta} d\Delta = \delta(M) - \delta(P).$$

Так как, с другой стороны,

$$\int\int_{(S)} \delta \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma = \int\int_{(\Omega)} \delta\, d\omega,$$

то в результате получим

$$\nabla U = -f\delta(P) \int\int_{(\Omega)} d\omega.$$

Если P — внешняя точка, то (см. § 5) $\int\int_{(\Omega)} d\omega = 0$ и оператор Лапласа также равен нулю, что нам уже известно.

Если же P есть внутренняя точка, то $\int\int_{(\Omega)} d\omega = 4\pi$ и мы получаем

$$\nabla U = -4\pi f\delta(P).$$

Таким образом, действительно, функция $U(P)$ удовлетворяет внутри тела уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi f\delta(x, y, z) \qquad (2.20)$$

и мы можем сформулировать следующее

Свойство 6. Если плотность тела $\delta(M)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка, то в каждой внутренней точке P тела T силовая функция U удовлетворяет уравнению Пуассона.

Примечание. Последнее свойство доказано при довольно жестких допущениях относительно плотности тела, которая должна быть не только сама непрерывной, но должна также иметь и непрерывные частные производные первого порядка.

Оказывается, что последнее условие не является обязательным и может быть заменено другим, менее стеснительным условием.

Наиболее известным является так называемое условие Гольдера, которое заключается в следующем.

Пусть D есть область пространства, занятая притягивающим телом, а $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1', y_1', z_1')$ — две произвольные точки этой области. По определению, плотность тела удовлетворяет условию Гольдера, если существуют такие две положительные постоянные $p\leqslant 1$ и C, что неравенство

$$\left|\delta(x_1', y_1', z_1')-\delta(x, y, z)\right| < C(\overline{MM_1})^p$$

выполняется во всей области D.

Это условие ограничивает в известном отношении быстроту изменения плотности тела при переходе от одной его точки к другой. При соблюдении условия Гольдера плотность $\delta(M)$ есть заведомо непрерывная функция координат, а с другой стороны, это условие, несомненно, выполняется, если частные производные первого порядка от плотности суть функции, ограниченные в области D.

Гольдер доказал, что если плотность тела удовлетворяет указанному условию, то силовая функция U притяжения такого тела также удовлетворяет уравнению Пуассона внутри тела. Приводить здесь это доказательство мы не будем *).

§ 8. Характеристические свойства силовой функции. Теорема Дирихле

1. Соберем теперь вместе все выведенные нами свойства силовой функции трехмерного тела и сформулируем их следующим образом:

1) Силовая функция тела непрерывной плотности есть функция конечная, однозначная и непрерывная во всем пространстве, обращающаяся в нуль в бесконечности, причем

$$\lim_{R\to\infty}(RU)=fm,$$

где m есть вся масса тела, а R — расстояние притягиваемой точки до начала координат **).

2) Частные производные первого порядка от силовой функции также конечны, однозначны и непрерывны во всем пространстве и обращаются в нуль в бесконечности, причем

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial x}\right|\leqslant fm,\quad \lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial y}\right|\leqslant fm,\quad \lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial z}\right|\leqslant fm.$$

---

*) Доказательство можно найти в книгах: Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала; Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.

**) Предполагается, что тело отнесено к некоторой неизменной, но произвольно выбранной системе декартовых координат $Oxyz$, расстояния от начала которой до точек тела все конечны.