этой области. По определению, плотность тела удовлетворяет условию Гольдера, если существуют такие две положительные постоянные $p \leqslant 1$ и C, что неравенство

$$\left|\delta(x_1', y_1', z_1') - \delta(x, y, z)\right| < C(\overline{MM_1})^p$$

выполняется во всей области D.

Это условие ограничивает в известном отношении быстроту изменения плотности тела при переходе от одной его точки к другой. При соблюдении условия Гольдера плотность $\delta(M)$ есть заведомо непрерывная функция координат, а с другой стороны, это условие, несомненно, выполняется, если частные производные первого порядка от плотности суть функции, ограниченные в области D.

Гольдер доказал, что если плотность тела удовлетворяет указанному условию, то силовая функция U притяжения такого тела также удовлетворяет уравнению Пуассона внутри тела. Приводить здесь это доказательство мы не будем *).

§ 8. Характеристические свойства силовой функции. Теорема Дирихле

1. Соберем теперь вместе все выведенные нами свойства силовой функции трехмерного тела и сформулируем их следующим образом:

1) Силовая функция тела непрерывной плотности есть функция конечная, однозначная и непрерывная во всем пространстве, обращающаяся в нуль в бесконечности, причем

$$\lim_{R \to \infty} (RU) = fm,$$

где m есть вся масса тела, а R — расстояние притягиваемой точки до начала координат **).

2) Частные производные первого порядка от силовой функции также конечны, однозначны и непрерывны во всем пространстве и обращаются в нуль в бесконечности, причем

$$\lim_{R \to \infty} \left| R^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right| \leqslant fm, \quad \lim_{R \to \infty} \left| R^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right| \leqslant fm, \quad \lim_{R \to \infty} \left| R^2 \frac{\partial U}{\partial z} \right| \leqslant fm.$$

---

*) Доказательство можно найти в книгах: Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала; Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.

**) Предполагается, что тело отнесено к некоторой неизменной, но произвольно выбранной системе декартовых координат $Oxyz$, расстояния от начала которой до точек тела все конечны.

3) Равенства

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

имеют место во всем пространстве.

4) Во всем внешнем относительно тела пространстве силовая функция U удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. $\nabla U=0$ во всем внешнем пространстве.

5) Если плотность тела непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка, то внутри тела силовая функция удовлетворяет уравнению Пуассона, т. е. $\nabla U=-4\pi f\delta$ во всей области пространства, занятой притягивающей материей.

Перечисленные свойства называются характеристическими свойствами силовой функции, так как они вполне определяют силовую функцию притяжения трехмерным телом материальной точки (единичной массы!), а поэтому эти свойства могут быть использованы для фактического нахождения силовой функции, чем мы в дальнейшем и воспользуемся.

Чтобы оправдать сказанное, мы докажем одну замечательную теорему, принадлежащую Дирихле, но сначала выведем одну вспомогательную формулу, данную Пуанкаре.

2. Рассмотрим формулу Остроградского (см. сноску на стр. 67) и положим в ней $P=U\frac{\partial V}{\partial x'}$, $Q=U\frac{\partial V}{\partial y'}$, $R=U\frac{\partial V}{\partial z'}$, где U и V суть две функции, определенные в области D и на ее границе, конечные, однозначные и непрерывные вместе со своими частными производными первого и второго порядков. Тогда получим следующую формулу, называемую формулой Грина:

$$\iiint\limits_{(D)}\left[U\nabla V+\frac{\partial U}{\partial x'}\frac{\partial V}{\partial x'}+\frac{\partial U}{\partial y'}\frac{\partial V}{\partial y'}+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial V}{\partial z'}\right]d\tau=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma. \tag{2.21}$$

Предположим, далее, что каждая из функций U и V определена во всем пространстве и регулярна на бесконечности, т. е. существует такая положительная постоянная A, что для достаточно больших значений R имеют место неравенства

$$|U|\leqslant\frac{A}{R}\cdot\left|\frac{\partial U}{\partial x'}\right|\leqslant\frac{A}{R^2},\ \ldots,\ |V|\leqslant\frac{A}{R},\ \left|\frac{\partial V}{\partial x'}\right|\leqslant\frac{A}{R^2},\ \ldots$$

Пусть в предыдущей формуле S есть сфера радиуса R с центром в начале координат. В силу приведенных неравенств мы будем иметь

$$\left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|=\left|\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{x'}{R}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{y'}{R}+\frac{\partial V}{\partial z'}\frac{z'}{R}\right|\leqslant\frac{3A}{R^2},$$

и поэтому

$$\left|\iint\limits_{(S)} U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma\right| < \frac{12\pi A^2}{R},$$

т. е. этот интеграл стремится к нулю при $R\to\infty$. Переходя в формуле Грина к пределу при $R\to\infty$ и обозначая через E область всего пространства, мы найдем

$$\iiint\limits_{(E)} \left[U\nabla V + \frac{\partial U}{\partial x'}\frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial U}{\partial y'}\frac{\partial V}{\partial y'} + \frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial V}{\partial z'}\right] d\tau = 0, \qquad (2.21')$$

где интеграл берется по всему пространству. Формула (2.21′) и называется *формулой Пуанкаре*.

Переходим к теореме Дирихле, которая формулируется следующим образом:

Теорема Дирихле. *Пусть тело T обладает непрерывной плотностью, частные производные первого порядка которой также непрерывны. Тогда, если каким-либо способом найдена функция $\bar{U}(x, y, z)$, обладающая всеми характеристическими свойствами силовой функции, эта найденная функция совпадает во всем пространстве с силовой функцией тела.*

Для доказательства обозначим, как и прежде, через U силовую функцию тела T, а через $\bar{U}$ — некоторую функцию, обладающую всеми характеристическими свойствами силовых функций. Положим

$$V = \bar{U} - U.$$

Эта функция конечна, однозначна и непрерывна во всем пространстве, регулярна на бесконечности и во всем пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому к этой функции можно применить формулу Пуанкаре, полагая в ней $U=V$, что дает

$$\iiint\limits_{(E)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau = 0,$$

где интеграл берется по всему пространству E.

Так как подынтегральная функция существенно положительна во всей области E, то последнее равенство может быть выполнено только при условии

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

откуда следует, что

$$V = \text{const}.$$

Но так как функции U и $\overline{U}$ обращаются обе в нуль на бесконечности, то этим же свойством обладает и V, откуда следует, что const=0, а значит,

$$\overline{U} \equiv U,$$

и теорема Дирихле доказана.

Примечание. Функция U, которую мы здесь рассматривали, является функцией координат x, y, z притягиваемой точки P, которая может быть также и притягивающей. Но параметры, определяющие положение и ориентацию тела в системе $Oxyz$, здесь рассматриваются как постоянные. Когда функция U уже найдена, обычно бывает нетрудно выразить ее явным образом и через упомянутые параметры.

Однако общие свойства силовой функции взаимного притяжения материальной частицы (материальной точки) и произвольного трехмерного тела, рассматриваемой как функция девяти независимых переменных, совершенно не известны.

Можно только отметить, что функция U, рассматриваемая как функция трех независимых переменных — координат ξ, η, ζ точки G, неизменно связанной с телом (центра приведения), также удовлетворяет уравнению Пуассона, если точка $P(x, y, z)$ находится внутри тела и если, конечно, плотность тела δ удовлетворяет условию Гольдера или более слабому условию, о котором шла речь выше.

Сказанное является, очевидно, следствием равенств

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

выводимых немедленно из равенств (2.3).

Итак, можем написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi f \delta(x, y, z),$$

однако координаты x, y, z в этом равенстве нужно уже рассматривать как величины постоянные. Что же касается вторых частных производных от силовой фуикции U по эйлеровым углам ψ, φ, ϑ, то неизвестио, существует ли уравиение, аиалогичное уравнению Пуассоиа, связывающее эти производные!

Точно так же неизвестно, удовлетворяет ли силовая функция взаимного притяжения двух тел какому-либо уравнению, когда эти тела имеют некоторую общую часть.

§ 9. Формула Гаусса и теорема Стокса

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные дополнительные свойства силовой функции притяжения материальным трехмерным телом материальной точки. Эти новые свойства не относятся к числу характеристических, но имеют значение