Но так как функции U и $\overline{U}$ обращаются обе в нуль на бесконечности, то этим же свойством обладает и V, откуда следует, что $\mathrm{const}=0$, а значит,

$$\overline{U} \equiv U,$$

и теорема Дирихле доказана.

Примечание. Функция U, которую мы здесь рассматривали, является функцией координат x, y, z притягиваемой точки P, которая может быть также и притягивающей. Но параметры, определяющие положение и ориентацию тела в системе $Oxyz$, здесь рассматриваются как постоянные. Когда функция U уже найдена, обычно бывает нетрудно выразить ее явным образом и через упомянутые параметры.

Однако общие свойства силовой функции взаимного притяжения материальной частицы (материальной точки) и произвольного трехмерного тела, рассматриваемой как функция девяти независимых переменных, совершенно не известны.

Можно только отметить, что функция U, рассматриваемая как функция трех независимых переменных — координат ξ, η, ζ точки G, неизменно связанной с телом (центра приведения), также удовлетворяет уравнению Пуассона, если точка $P(x, y, z)$ находится внутри тела и если, конечно, плотность тела δ удовлетворяет условию Гольдера или более слабому условию, о котором шла речь выше.

Сказанное является, очевидно, следствием равенств

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

выводимых немедленно из равенств (2.3).

Итак, можем написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi f \delta(x, y, z),$$

однако координаты x, y, z в этом равенстве нужно уже рассматривать как величины постоянные. Что же касается вторых частных производных от силовой фуикции U по эйлеровым углам ψ, φ, ϑ, то неизвестио, существует ли уравиение, аиалогичное уравнению Пуассоиа, связывающее эти производные!

Точно так же неизвестно, удовлетворяет ли силовая функция взаимного притяжения двух тел какому-либо уравнению, когда эти тела имеют некоторую общую часть.

§ 9. Формула Гаусса и теорема Стокса

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные дополнительные свойства силовой функции притяжения материальным трехмерным телом материальной точки. Эти новые свойства не относятся к числу характеристических, но имеют значение для некоторых приложений, особенно в теории фигуры Земли. К ним относятся свойства, выражаемые теоремой Гаусса и вытекающими из нее следствиями, касающимися экстремальных свойств силовой функции и свойств поверхностей уровня.

1. Выведем сначала формулу Гаусса. Пусть в некоторой области D пространства заданы две функции U_1 и U_2, регулярные в этой области, т. е. конечные, однозначные и непрерывные вместе со своими частными производными первого и второго порядка.

Тогда справедлива следующая формула, являющаяся следствием формулы Остроградского и называемая иногда формулой Грина*):

$$\iint\limits_{(D)}\int (U_1\nabla U_2 - U_2\nabla U_1)\,d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})}\left(U_1\frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)d\sigma, \quad (2.22)$$

где производные $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial U_2}{\partial n}$ берутся по внешней нормали к поверхности $\bar{S}$, ограничивающей область D. Положим в этой формуле $U_1=1$ и $U_2=U$, где U есть некоторая правильная в области D функция **). Тогда формула (2.22) примет следующий частный вид:

$$\iint\limits_{(D)}\int \nabla U\,d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})}\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma. \quad (2.22')$$

Рассмотрим теперь некоторое трехмерное тело (с конечными размерами), плотность которого $\delta(M)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка, или, во всяком случае, удовлетворяет условию Гельдера.

Допустим, что некоторая область D пространства, ограниченная поверхностью $\bar{S}$, полностью содержит в себе это тело. Пусть, далее, U есть силовая функция притяжения телом T материальной точки P единичной массы.

Функция U конечна, однозначна и непрерывна во всей области D вместе со своими частными производными первого порядка. Но вторые частные производные от U разрывны на поверхности S тела T и поэтому функция U не является правильной в области D, как это требуется для применения фор-

---

*) Эта формула получается из формулы (2.21). Действительно, полагая в (2.21) $U=U_1$, $V=U_2$, затем $U=U_2$ и $V=U_1$ и вычитая затем из одного полученного равенства другое, мы и получим формулу (2.22). В некоторых учебниках формула (2.22) называется первой формулой Грина, а формула (2.21) — предварительной формулой Грина

**) «Правильная функция»=«регулярная функция». Здесь употребляется и та и другая терминология.

мулы (2.22′). Чтобы можно было применить эту формулу, разобьем область D на две части, одна из которых есть тело T, ограниченное поверхностью S, а другая, которую обозначим через $D - T$, ограничена двумя поверхностями S и $\bar{S}$. Применяя формулу (2.22′) к каждой из этих двух частей в отдельности (что, очевидно, законно), мы будем иметь

$$\iiint\limits_{(T)} \nabla U \, d\tau = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n} \, d\sigma$$

и

$$\iiint\limits_{(D-T)} \nabla U \, d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n} \, d\sigma - \iint\limits_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n} \, d\sigma,$$

где производные берутся соответственно по внешним нормалям к поверхностям S и $\bar{S}$. Складывая эти два равенства и имея в виду, что в области T оператор Лапласа ∇U равен $-4\pi f \delta$, а в области $D - T$ он равен нулю, мы получим

$$-4\pi f \iiint\limits_{(T)} \delta \, d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n} \, d\sigma.$$

Но интеграл в левой части равенства есть полная масса m притягивающего тела T, и мы находим окончательно

$$\iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n} \, d\sigma = -4\pi f m. \tag{2.23}$$

Эта формула и называется *формулой Гаусса*.

2. Из формулы (2.23) легко вывести одно экстремальное свойство силовой функции, которое можно сформулировать следующим образом:

Принцип максимума. *Силовая функция трехмерного тела, рассматриваемая как функция координат притягиваемой точки, не может иметь минимума внутри притягивающей массы, но может иметь максимум.*

Действительно, допустим, что силовая функция U тела T имеет минимум в некоторой внутренней точке тела, которую назовем P. Вообразим сферу Σ с центром в P настолько малого радиуса, чтобы вся сфера целиком находилась внутри тела. Применяя тогда к сфере Σ формулу (2.23), мы получим

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial U}{\partial n} \, d\sigma = -4\pi f \bar{m},$$

где $\bar{m}$ обозначает часть массы, заключенную внутри сферы.

Если, как это предположено, функция U имеет в точке P минимум, то вблизи точки P всякое значение функции U будет больше, чем значение функции в самой точке P. Проведем через точку P любой луч. Значение U в любой точке этого луча будет больше, чем значение ее в точке P. Поэтому мы можем указать такую сферу Σ' с центром в P и заключенную внутри Σ, что во всех точках поверхности Σ' производная $\frac{\partial U}{\partial n}$, взятая по направлению от точки P, будет положительной. Поэтому левая часть формулы Гаусса, примененной к сфере Σ', даст величину положительную, что приводит к противоречию, так как правая часть равенства заведомо отрицательна.

Таким образом, первая часть высказанного свойства доказана. Что же касается второй части, то ее справедливость достаточно показать на каком-либо примере. Этот пример доставляет нам случай однородного шара, рассмотренный в § 5, так как легко видеть, что в этом примере силовая функция имеет максимум в центре шара.

Второе экстремальное свойство относится к внешнему пространству и формулируется так:

Принцип экстремума. *Вне притягивающей массы силовая функция не может иметь ни максимума, ни минимума.*

Это свойство силовой функции является следствием того, что вне притягивающей массы эта функция является *гармонической* *), но может быть также доказано непосредственно, совершенно так же, как и принцип максимума.

Действительно, пусть P есть какая угодно внешняя по отношению к телу точка. Вообразим опять сферу Σ с центром в P и достаточно малого радиуса. Так как во всем внешнем пространстве $\nabla U=0$, то, применяя формулу (2.22′) к сфере Σ, мы найдем

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Допустим теперь, что в точке P функция U имеет максимум (минимум). Тогда во всех точках поверхности Σ мы будем иметь $\frac{\partial U}{\partial n} < 0$ $\left(\frac{\partial U}{\partial n} > 0\right)$, а значит, интеграл в последнем равенстве есть величина существенно отрицательная (положительная), что приводит к противоречию.

Полученное противоречие доказывает, что ни в одной внешней точке пространства силовая функция U не может иметь ни максимума, ни минимума.

---

*) См., например, Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала.

3. Применим теперь формулу Гаусса (2.23) для доказательства важной теоремы, называемой теоремой Стокса.

Пусть T — притягивающее тело, плотность которого δ удовлетворяет тем же условиям, что и ранее. Рассмотрим семейство поверхностей уровня (изопотенциальных поверхностей)

$$U(x,\ y,\ z)=C,$$

и пусть $\bar{S}$ — одна из этих поверхностей, заключающая внутри себя всю притягивающую массу (рис. 13).

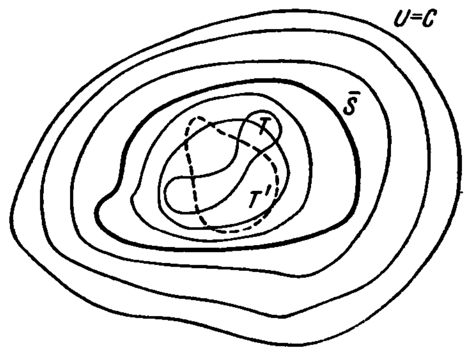

Рис. 13.

Предположим, что притягивающую материю можно перераспределить таким образом, что ее масса m при этом не изменится и что поверхность $\bar{S}$ по-прежнему останется поверхностью уровня. Пусть T' есть тело, образованное перераспределенной материей. Ясно, что тело T' отличается от тела T либо формой, либо по структуре, а поэтому силовая функция тела T' также будет, вообще говоря, отличаться от силовой функции тела T.

Пусть U' — силовая функция нового тела T'. Тогда уравнение поверхности $\bar{S}$ мы можем написать также в виде

$$U'(x,\ y,\ z)=C'.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$V=U'-U.$$

Вне поверхности $\bar{S}$, как легко видеть,

$$\nabla V=0,$$

а на поверхности $\bar{S}$ имеем

$$V=C'-C=\text{const}.$$

С другой стороны, по формуле Гаусса мы имеем для тела T

$$\iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma=-4\pi f m,$$

а точно так же для тела T'

$$\iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U'}{\partial n}\,d\sigma=-4\pi f m,$$

поэтому

$$\iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Докажем теперь, что функция V тождественно равна нулю во всем пространстве, внешнем по отношению к поверхности $\bar{S}$.

Для этого рассмотрим область $\bar{E}$, заключающуюся между поверхностью $\bar{S}$ и поверхностью сферы $\bar{\Sigma}$ настолько большого радиуса R, что вся поверхность $\bar{S}$ заведомо лежит внутри этой сферы. Применяя к функции V, регулярной в области $\bar{E}$, формулу Грина (2.21), мы можем написать, полагая в этой формуле $U=V$:

$$\iiint\limits_{(\bar{E})} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau + \\ + \iint\limits_{(\bar{S})} V \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma + \iint\limits_{(\bar{\Sigma})} V \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Так как на $\bar{S}$ функция V равна постоянной величине, то второй интеграл равен нулю. Рассмотрим третий интеграл. Так как U и U' регулярны на бесконечности, то можно указать две такие положительные постоянные, что при достаточно большом R будем иметь неравенства

$$|V| < \frac{A}{R}, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right| < \frac{B}{R^2}.$$

Следовательно,

$$\left|\iint\limits_{(\bar{\Sigma})} V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma\right| < \frac{AB}{R^3} \iint\limits_{(\bar{\Sigma})} d\sigma = \frac{4\pi AB}{R^2},$$

т. е. стремится к нулю при $R \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $R \to \infty$ и обозначая через E все пространство, внешнее по отношению к поверхности $\bar{S}$, мы найдем

$$\iiint\limits_{(E)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau = 0,$$

откуда следует, что во всякой точке E должны выполняться условия

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

отсюда следует, что

$$V = \text{const}$$

во всех точках области E. Так как, очевидно, V равна нулю в бесконечности, то эта постоянная есть нуль, и мы находим

$$V = U' - U \equiv 0,$$

откуда

$$U' \equiv U,$$

что и позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема Стокса. *Если некоторая поверхность уровня $\bar{S}$ заключает внутри себя всю притягивающую материю, то при всяком перераспределении этой материи, при котором величина ее массы остается неизменной, а поверхность $\bar{S}$ остается поверхностью уровня, силовая функция притягивающей массы во внешнем относительно поверхности $\bar{S}$ пространстве также остается без изменения.*

Иллюстрацией этой теоремы может служить силовая функция однородного шара, для которой поверхности уровня суть сферы, центр которых совпадает с центром шара. Если взять какую-либо из этих сфер, заключающую внутри себя шар, то при любом изменении размеров и плотности шара, при которых его масса остается неизменной, поверхность уровня остается той же сферой. Можно даже сосредоточить всю массу шара в его центре, т. е. превратить шар в материальную точку той же массы.

Это показывает, что если мы знаем силовую функцию вне поверхности уровня, то еще не можем сказать ничего определенного ни о форме притягивающего тела, ни о его внутреннем строении.