ГЛАВА III

ПРИТЯЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ТЕЛ

§ 1. Оператор Лапласа в криволинейных координатах

1. Мы видели в предыдущей главе, что силовая функция ньютоновского притяжения, рассматриваемая как функция трех прямоугольных координат притягиваемой точки, удовлетворяет некоторому линейному уравнению в частных производных второго порядка, называемому уравнением Лапласа или уравнением Пуассона.

Такое уравнение, левую часть которого составляет выражение, именуемое оператором Лапласа, играет значительную роль в теории притяжения, а так как оно часто встречается и во многих других вопросах математического естествознания, то представляет интерес рассмотреть подробнее некоторые его свойства.

Далее нам придется пользоваться уравнением Лапласа, а также уравнением Пуассона, не только в декартовых, но и в некоторых других координатах, например, в цилиндрических, в полярных сферических и т. д.

По этой причине мы рассмотрим в этом параграфе, как преобразуется оператор Лапласа при переходе к другим координатам, причем займемся сначала наиболее общим преобразованием такого рода, из которого уже нетрудно будет вывести и различные частные случаи.

Для большей простоты и симметрии рассмотрим какую-либо функцию от трех независимых переменных x_1, x_2, x_3, являющихся тремя прямоугольными декартовыми координатами точки в пространстве.

Обозначая эту функцию через V, определим оператор Лапласа над этой функцией уже известной формулой

$$\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим общее ортогональное преобразование координат *). Пусть

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) = \rho_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

суть уравнения трех семейств поверхностей, образующих тройную ортогональную систему, так что две какие-нибудь поверхности, принадлежащие к двум различным семействам, пересекаются всюду под прямым углом. Так как

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_3}$$

суть угловые коэффициенты нормали к поверхности $\Phi_i = \rho_i$, то условия ортогональности поверхностей (3.2) имеют вид

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial\rho_i}{\partial x_s}\frac{\partial\rho_j}{\partial x_s} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j). \tag{3.3}$$

Решая уравнения (3.2) относительно величин x_i, мы выразим эти величины в функции параметров ρ_1, ρ_2, ρ_3, называемых вообще *криволинейными координатами* точки в пространстве

$$x_i = \varphi_i(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3.2'}$$

Ясно, что уравнения (3.2′) суть уравнения тех же поверхностей, что и уравнения (3.2), только написанные в другом виде, а поэтому условия ортогональности будут теперь иметь вид

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial\varphi_s}{\partial\rho_i}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\rho_j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i). \tag{3.3'}$$

Посмотрим, какой вид примет оператор Лапласа при переходе к криволинейным координатам ρ_i.

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial\rho_k}\frac{\partial\rho_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

и затем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\partial\rho_k}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho_k\,\partial\rho_j}\frac{\partial\rho_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial\rho_k}\frac{\partial^2\rho_k}{\partial x_i^2} \right\}.$$

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 1, перев. с франц., ГТТИ, 1933. Другой способ преобразования оператора Лапласа можно найти, например, в книге Л. Н. Сретенского, Теория ньютоновского потенциала, или в книге Н. П. Грушинского, Теория фигуры Земли, Физматгиз, 1963.

Складывая эти три выражения, получим с помощью соотношений ортогональности (3.3) выражение для оператора Лапласа в новых переменных:

$$\nabla V = \sum_{k=1}^{3} \left\{ \Delta_1(\rho_k) \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_k^2} + \Delta_2(\rho_k) \frac{\partial V}{\partial \rho_k} \right\}, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta_1(\rho_k) = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} \right)^2; \quad \Delta_2(\rho_k) = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x_s^2} \tag{3.4'}$$

— так называемые дифференциальные параметры Ламе первого и второго порядка *).

Дифференциальные параметры первого порядка вычисляются без всякого затруднения. Действительно, дифференцируя формулы (3.2′), мы получим соотношения вида

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} = 1_i^s,$$

где введено для сокращения обозначение

$$1_i^s = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s = i, \\ 0 & \text{при} \quad s \neq i. \end{cases}$$

Решая полученные уравнения относительно производных от новых переменных по старым, мы найдем

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} = H_k^{-1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_k},$$

где положено

$$H_k = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \right)^2, \tag{3.5}$$

откуда имеем

$$\Delta_1(\rho_k) = H_k^{-1}.$$

Чтобы получить выражение для $\Delta_2(\rho_k)$ через криволинейные координаты, положим в (3.4) последовательно $V = x_1, x_2, x_3$, что даст три соотношения

$$\sum_{k=1}^{3} \left\{ H_k^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \rho_k^2} + \Delta_2(\rho_k) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \right\} = 0,$$

которые остается только разрешить относительно $\Delta_2(\rho_k)$.

*) Дифференциальный параметр второго порядка для величины ρ_k совпадает, очевидно, с выражением оператора Лапласа для этой величины.

Умножая для этого последние равенства на $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}$, складывая и имея в виду условия ортогональности (3.3′), мы найдем

$$H_k\Delta_2(\rho_k)+\sum_{s=1}^{3}H_s^{-1}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_s^2}=0.$$

Но из (3.5) выводим дифференцированием

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_k^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_k},$$

а дифференцирование условий (3.3′) дает

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_s^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_k\,\partial\rho_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_s}\right)=0 \qquad (s\neq k),$$

откуда имеем

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_s^2}=-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_s}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_k\,\partial\rho_s}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k).$$

Поэтому

$$\Delta_2(\rho_k)=-\frac{1}{2}H_k^{-2}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_k}+\frac{1}{2}H_k^{-1}{\sum_{s=1}^{3}}'H_s^{-1}\frac{\partial H_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k),$$

а полагая еще

$$h_k^2=H_k^{-1}, \tag{3.5′}$$

мы представим $\Delta_2(\rho_k)$ в следующем виде:

$$\Delta_2(\rho_k)=h_k\frac{\partial h_k}{\partial\rho_k}-h_k^2{\sum_{s=1}^{3}}'\frac{1}{h_s}\frac{\partial h_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k).$$

Подставляя теперь полученные выражения для $\Delta_1(\rho_k)$ и $\Delta_2(\rho_k)$ в формулу (3.4), получим окончательно

$$\nabla V=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_3}\right)\right], \tag{3.6}$$

что и дает искомое выражение для оператора Лапласа в произвольных криволинейных координатах.

Последнюю формулу можно записать более кратко в виде

$$\nabla V = h_1 h_2 h_3 \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \rho_s} \left(\frac{h_s}{h_{s+1} h_{s+2}} \frac{\partial V}{\partial \rho_s} \right),$$

если условиться брать $s+j-3$ вместо $s+j$, когда $s+j>3$.

Величины h_1, h_2, h_3, определяемые формулами (3.5′), называются коэффициентами Ламе.

2. Вычислим по формуле (3.6) оператор Лапласа для некоторых частных случаев криволинейных координат.

Введем сначала вместо декартовых координат x_i цилиндрические координаты ρ, v, z — формулами

$$x_1 = \rho \cos v, \quad x_2 = \rho \sin v, \quad x_3 = z.$$

Полагая в формулах (3.5′) $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = v$, $\rho_3 = z$, найдем без труда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{\rho}, \quad h_3 = 1,$$

и выражение для оператора Лапласа примет вид

$$\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь случай полярных сферических координат

$$x_1 = r \cos \lambda \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \lambda \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

Полагая в формулах (3.5′) $\rho_1 = r$, $\rho_2 = \lambda$, $\rho_3 = \theta$, получим

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r \sin \theta}, \quad h_3 = \frac{1}{r},$$

и оператор Лапласа примет вид

$$\nabla V = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right]. \tag{3.8}$$

Рассмотрим, далее, преобразование оператора Лапласа к эллипсоидальным координатам Ламе. Пусть формулы, связывающие старые декартовы координаты x_i и новые переменные ρ_i, имеют вид

$$x_i^2 = \frac{(a_i^2 + \rho_1)(a_i^2 + \rho_2)(a_i^2 + \rho_3)}{(a_i^2 - a_{i+1}^2)(a_i^2 - a_{i+2}^2)} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где, как и выше, нужно писать $i+j-3$ вместо $i+j$, когда $i+j>3$ $(j=1,2)$. Величины ρ_i называются эллипсоидальными координатами точки в пространстве *).

*) См. ниже, § 4 этой главы. См. также В. И. Смирнов, Курс высшей математики.

Громоздкое, но не сложное вычисление по формулам (3.5′) дает для коэффициентов Ламе следующие выражения:

$$h_1 = \frac{2R_i}{\sqrt{(\rho_i - \rho_{i+2})(\rho_i - \rho_{i+2})}},$$

где положено, для сокращения,

$$R_i = \sqrt{(a_1^2 + \rho_i)(a_2^2 + \rho_i)(a_3^2 + \rho_i)} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{3.9}$$

и сохраняется условие относительно индексов.

Подставляя полученные выражения для коэффициентов Ламе в формулу (3.6), мы найдем окончательно

$$\nabla V = \frac{4}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)} \sum_{i=1}^{3} (\rho_{i+1} - \rho_{i+2})\, R_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(R_i \frac{\partial V}{\partial \rho_i}\right). \tag{3.10}$$

В заключение рассмотрим так называемое преобразование обратными радиусами-векторами, определяемое формулами

$$x_i = x_i' r'^{-2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где

$$r'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Полагая в формулах (2.28) $\rho_i = x_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, найдем

$$h_1 = h_2 = h_3 = r'^2,$$

откуда

$$\nabla V = r'^6 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{r'^2} \frac{\partial V}{\partial x_i'}\right).$$

Это выражение может быть написано так же, как нетрудно проверить, в виде

$$\nabla V = r'^5 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}\left(\frac{V}{r'}\right),$$

откуда вытекает известная теорема Кельвина:

Теорема Кельвина. Если $V(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция $r^{-1}V(xr^{-2},\ yr^{-2},\ zr^{-2})$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ также удовлетворяет этому уравнению.

§ 2. Притяжение сферических тел

1. Рассмотрим область пространства D, заключенную между двумя концентрическими сферами Σ_1 и Σ_2 с общим центром в точке O и с радиусами a_1 и $a_2 > a_1$. Вообразим, что область D заполнена притягивающей материей, плотность которой δ есть