Громоздкое, но не сложное вычисление по формулам (3.5′) дает для коэффициентов Ламе следующие выражения:

$$h_i = \frac{2R_i}{\sqrt{(\rho_i - \rho_{i+2})(\rho_i - \rho_{i+2})}},$$

где положено, для сокращения,

$$R_i = \sqrt{(a_1^2 + \rho_i)(a_2^2 + \rho_i)(a_3^2 + \rho_i)} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3.9}$$

и сохраняется условие относительно индексов.

Подставляя полученные выражения для коэффициентов Ламе в формулу (3.6), мы найдем окончательно

$$\nabla V = \frac{4}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)} \sum_{i=1}^{3} (\rho_{i+1} - \rho_{i+2}) R_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(R_i \frac{\partial V}{\partial \rho_i}\right). \tag{3.10}$$

В заключение рассмотрим так называемое **преобразование обратными радиусами-векторами**, определяемое формулами

$$x_i = x_i' r'^{-2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$r'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Полагая в формулах (2.28) $\rho_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, найдем

$$h_1 = h_2 = h_3 = r'^2,$$

откуда

$$\nabla V = r'^6 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{r'^2} \frac{\partial V}{\partial x_i'}\right).$$

Это выражение может быть написано так же, как нетрудно проверить, в виде

$$\nabla V = r'^5 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}\left(\frac{V}{r'}\right),$$

откуда вытекает известная теорема Кельвина:

Теорема Кельвина. *Если $V(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция $r^{-1}V(xr^{-2}, yr^{-2}, zr^{-2})$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ также удовлетворяет этому уравнению.*

§ 2. Притяжение сферических тел

1. Рассмотрим область пространства D, заключенную между двумя концентрическими сферами Σ_1 и Σ_2 с общим центром в точке O и с радиусами a_1 и $a_2 > a_1$. Вообразим, что область D заполнена притягивающей материей, плотность которой δ есть

заданная функция от расстояния r' до центра O, определенная в промежутке от a_1 до a_2.

Полученное таким образом материальное тело T мы будем называть *шаровым слоем, обладающим сферическим распределением плотностей* или *обладающим сферической структурой*.

В частности, при $a_1=0$, $a_2=a$ шаровой слой превращается в полный шар, а если плотность δ есть величина постоянная, то мы имеем случай однородного шарового слоя или, соответственно, однородного шара.

Мы уже нашли в § 5 гл. II силовую функцию однородного шара путем непосредственного вычисления интеграла. Подобным же образом можно найти силовую функцию шара, обладающего сферическим распределением плотностей, а также силовую функцию и шарового слоя такой же структуры.

Мы не будем повторять эти вычисления, а применим для нахождения силовой функции шара характеристические свойства, установленные в § 8 предыдущей главы.

Предположим, что функция $\delta(r')$ непрерывна в промежутке от a_1 до a_2 и имеет в этом промежутке непрерывную производную $\delta'(r')$. Тогда искомая силовая функция должна удовлетворять уравнению Лапласа вне притягивающей массы и уравнению Пуассона — внутри нее и должна обладать, сверх того, и остальными характеристическими свойствами.

Чтобы написать уравнения, которым должна удовлетворять искомая силовая функция U шарового слоя, заметим, что по *соображениям симметрии* эта функция должна зависеть только от расстояния r притягиваемой точки до общего центра O.

Поэтому формула (3.8) немедленно даст оператор Лапласа для функции $U(r)$ в виде

$$\nabla U(r)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}. \tag{3.8'}$$

Следовательно, в промежутках $0\leqslant r\leqslant a_1$ и $a_2\leqslant r<\infty$ (т. е. вне притягивающей материи) функция U должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}=0, \tag{3.11}$$

а в промежутке $a_1\leqslant r\leqslant a_2$ — уравнению

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}=-4\pi f\delta(r). \tag{3.12}$$

Легко видеть, что линейно независимые функции

$$U_1 = 1, \quad U_2 = \frac{1}{r}$$

— решения уравнения (3.11), а поэтому

$$U = C_1 + \frac{C_2}{r}, \tag{3.11'}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Применяя затем к уравнению (3.12) способ изменения произвольных постоянных, мы можем написать общее решение этого уравнения в следующем виде:

$$U = \overline{C}_1 + \frac{\overline{C}_2}{r} + \frac{4\pi f}{r}\int\limits_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr' - 4\pi f\int\limits_{a_1}^{r} r'\delta(r')\,dr', \tag{3.12'}$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ — две другие произвольные постоянные.

Дифференцируя далее (3.11′) и (3.12′), найдем

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{C_2}{r} \tag{3.11''}$$

и

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{\overline{C}_2}{r^2} - \frac{4\pi f}{r^2}\int\limits_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'. \tag{3.12''}$$

Перейдем к определению произвольных постоянных, для чего и используем остальные характеристические свойства силовой функции. В промежутке $0 \leqslant r \leqslant a_1$ функция U определяется формулой (3.11′) и должна быть к о н е ч н о й в этом промежутке. Отсюда следует, что должно быть $C_2 = 0$, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} U &= C_1 \\ U' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant r \leqslant a_1). \tag{3.13}$$

Далее, в промежутке $a_2 \leqslant r < \infty$ функция U опять определяется формулой (3.11′), но произвольные постоянные должны иметь уже другие значения. Эти постоянные определятся из условия $\lim\limits_{r\to\infty}(rU) = fm$, откуда имеем, очевидно, $C_1 = 0$ и $C_2 = fm$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{fm}{r}, \\ U' &= -\frac{fm}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad (a_2 \leqslant r < \infty). \tag{3.14}$$

Далее, так как функции U и U' должны быть непрерывны при $r=a_1$, то равенства (3.11′), (3.12′) и (3.13) дают условия

$$C_1=\overline{C}_1+\frac{\overline{C}_2}{a_1}, \quad -\frac{\overline{C}_2}{a_1^2}=0,$$

откуда находим

$$C_1=\overline{C}_1, \quad \overline{C}_2=0.$$

Теперь условия непрерывности функций U и U' при $r=a_2$ дают

$$\frac{fm}{a_2}=\overline{C}_1+\frac{4\pi f}{a_2}\int_{a_1}^{a_2} r'^2\delta(r')\,dr'-4\pi f\int_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr'.$$

Так как вся масса слоя

$$m=4\pi\int_{a_1}^{a_2} r'^2\delta(r')\,dr',$$

то

$$\overline{C}_1=C_1=4\pi f\int_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr'$$

и все постоянные, таким образом, определены.

Итак, силовая функция шарового слоя, сферической структуры, определяется следующими формулами:

в промежутке $0\leqslant r\leqslant a_1$:

$$\left.\begin{aligned} U(r)&=4\pi f\int_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr',\\ U'(r)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.13′}$$

т. е. материальная точка, находящаяся во внутренней полости слоя, вовсе не испытывает притяжения. Мы опять получаем теорему Ньютона, доказанную ранее для однородного сферического слоя;

в промежутке $a_1\leqslant r\leqslant a_2$:

$$\left.\begin{aligned} U(r)&=\frac{4\pi f}{r}\int_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'+4\pi f\int_{r}^{a_2} r'\delta(r')\,dr',\\ U'(r)&=-\frac{4\pi f}{r}\int_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'=-\frac{fm(r)}{r^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

т. е. точка P, находящаяся внутри слоя на расстоянии r от его центра, притягивается по закону Ньютона материальной точкой O, масса которой есть

$$m(r) = 4\pi \int_{a_1}^{r} r'^2 \delta(r')\, dr',$$

т. е. равна массе шарового слоя, ограниченного сферой Σ_1 и концентрической сферой радиуса r; наконец, в промежутке $a_2 \leqslant r < \infty$ имеем

$$\left.\begin{aligned} U(r) &= \frac{fm}{r}, \\ U'(r) &= -\frac{fm}{r^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.14'}$$

т. е. внешняя материальная точка притягивается шаровым слоем так, как будто бы вся его масса была сосредоточена в его центре.

Для сплошного шара $a_1 = 0$, и мы имеем, заменяя a_2 через a, в промежутке $0 \leqslant r \leqslant a$:

$$\left.\begin{aligned} U(r) &= \frac{4\pi f}{r} \int_0^r r'^2 \delta(r')\, dr' + 4\pi f \int_r^a r' \delta(r')\, dr', \\ U'(r) &= -\frac{4\pi f}{r^2} \int_0^r r'^2 \delta(r')\, dr'. \end{aligned}\right\} \tag{3.15'}$$

Наконец, если $\delta = \text{const}$, то для шарового слоя имеем в промежутке $a_1 \leqslant r \leqslant a_2$:

$$U(r) = 4\pi f \delta \left[\frac{r^3 - a_1^3}{3r} + \frac{a_2^2 - r^2}{2}\right],$$

$$U'(r) = -4\pi f \delta \frac{r^3 - a_1^3}{3r^2},$$

и для сплошного шара — в промежутке $0 \leqslant r \leqslant a$:

$$U(r) = \frac{2\pi f \delta}{3} (3a^2 - r^2),$$

$$U'(r) = -\frac{4}{3} \pi f \delta r,$$

что было уже найдено непосредственным вычислением.

Составляющие силы притяжения в прямоугольной системе координат с началом в центре слоя (или шара) и с произвольными направлениями осей найдутся по очевидным формулам

$$X = \frac{x}{r} U'(r), \quad Y = \frac{y}{r} U'(r), \quad Z = \frac{z}{r} U'(r).$$

Теперь заметим, что если центр шара (или слоя) находится в точке $G(\xi, \eta, \zeta)$ прямоугольной системы координат с началом в произвольно выбранной точке O, то все приведенные выше формулы сохранятся без изменения, но вместо r нужно везде поставить

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Тогда формулы (3.13′), (3.14′), (3.15) определят силовую функцию взаимного притяжения шарового слоя (или полного шара) и материальной точки P единичной массы *).

Эта силовая функция зависит только от расстояния R точки P до центра G слоя (или шара), а следовательно, вовсе не зависит от углов Эйлера, определяющих ориентацию собственной системы координат. Поэтому составляющие сил притяжения, действующих на точку P и на тело T (с центром приведения в точке G), найдутся по очевидным формулам:

$$X=\frac{x-\xi}{R}U'(R),\quad Y=\frac{y-\eta}{R}U'(R),\quad Z=\frac{z-\zeta}{R}U'(R),$$

$$\Xi=\frac{\xi-x}{R}U'(R),\quad \mathrm{H}=\frac{\eta-y}{R}U'(R),\quad \mathrm{Z}=\frac{\zeta-z}{R}U'(R),$$

а составляющие момента силы притяжения, действующей на тело T (относительно точки G), очевидно, равны нулю **).

2. Пусть теперь имеем два тела T_1 и T_2, каждое из которых есть либо шаровой слой со сферическим распределением плотностей либо полный шар такой же структуры.

Обозначим, как и ранее, через M_i $(i=1,2)$ текущую точку тела T_i, в которой сосредоточена элементарная масса dm_i, и через Δ расстояние между M_1 и M_2. Тогда силовая функция взаимного притяжения этих двух трехмерных тел определится, как мы знаем, следующей общей формулой:

$$U=f\int\int\limits_{(T_1)}\int\int\int\limits_{(T_2)}\int\frac{dm_1\,dm_2}{\Delta}. \tag{3.16}$$

Обозначим через $U_2(M_1)$ силовую функцию тела T_2 на точку M_1, в которой сосредоточена единичная масса, а через $U_1(M_2)$ — такую же функцию тела T_1 на точку M_2.

Тогда, очевидно, формула (3.16) может быть написана двояким образом:

$$U=\int\int\limits_{(T_1)}\int U_2(M_1)\,dm_1=\int\int\limits_{(T_2)}\int U_1(M_2)\,dm_2. \tag{3.16′}$$

*) Если масса точки есть μ, то во всех предыдущих формулах нужно ввести дополнительный множитель μ.

**) См. формулы (2.3) гл. II.

Пусть шаровые слои T_1 и T_2 являются внешними друг для друга. Тогда $U_2(M_1)$ есть силовая функция шарового слоя на внешнюю точку M_1 единичной массы, и по формуле (3.14) мы будем иметь (рис. 14)

$$U_2(M_1) = f\iiint\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta} = \frac{fm_2}{\Delta_2},$$

где Δ_2 — расстояние точки M_1 до центра G_2 слоя T_2, а масса слоя T_2 есть m_2.

Аналогично можем написать также

$$U_1(M_1) = f\iiint\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{\Delta} = \frac{fm_1}{\Delta_1},$$

где Δ_1 есть расстояние точки M_2 до центра G_1 тела T_1, а m_1 — масса этого слоя.

Поэтому формулы (3.16′) напишутся теперь в виде

$$U = fm_2\iiint\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{\Delta_2} = fm_1\iiint\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta_1}.$$

Но каждый из этих двух интегралов есть опять, очевидно, силовая функция слоя T_1 (слоя T_2) на внешнюю материальную точку G_2 с массой m_2 (G_1 с массой m_1), а следовательно, опять по формуле (3.14) мы будем иметь

$$U = f\frac{m_1 m_2}{R}, \qquad (3.17)$$

где R обозначает расстояние между центрами G_1 и G_2.

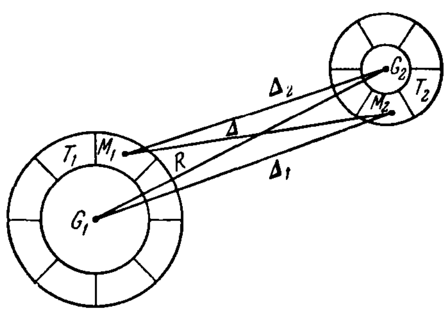

Рис. 14.

Но формула (3.17) определяет силовую функцию взаимного притяжения двух материальных точек G_1 и G_2 с массами m_1 и m_2, а следовательно, два шаровых слоя, каждый из которых обладает сферической структурой, внешние по отношению друг к другу, притягиваются взаимно с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

Можно также сказать, что два внешних шаровых слоя взаимно притягиваются так же, как притягивались бы две материальные точки, помещенные в центрах слоев и обладающих их массами.

Многие естественные небесные тела (звезды, большие планеты, некоторые их спутники, шаровые звездные скопления) имеют форму, весьма близкую к сферической, а распределение материи внутри них, вероятно, близко к сферическому закону.

Отсюда следует, что такие небесные тела взаимно притягиваются почти как материальные точки даже на достаточно близких расстояниях между ними. Ранее, во второй главе, было показано, что два совершенно произвольных тела, находящихся на весьма значительном расстоянии, также притягиваются как материальные точки. Взаимное действие этих двух причин и позволяет в астрономии, а в частности в небесной механике, широко пользоваться законом Ньютона в его простейшей форме. Сказанное относится также и к искусственным небесным телам, когда рассматривается задача о их поступательном движении.

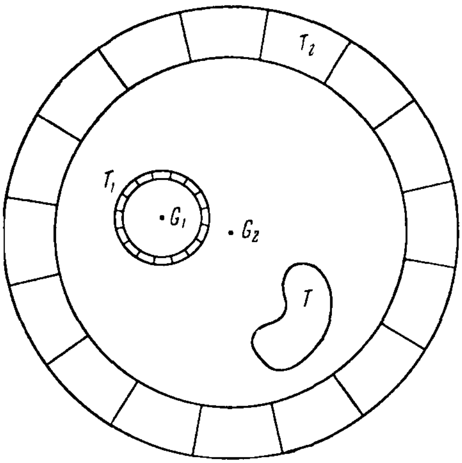

Рис. 15.

Составляющие сил притяжения, действующих на слои T_1 и T_2, находятся также как и для материальных точек, а составляющие моментов этих сил относительно центров G_1 и G_2 соответственно, очевидно, равны нулю.

Допустим теперь, что одно из тел расположено целиком во внутренней полости другого. Пусть, например, тело T_2 есть шаровой слой, а тело T_1 есть слой, или шар, находящийся во внутренней полости слоя T_2 (рис. 15). Рассмотрим какую угодно частицу тела T_1. По теореме Ньютона (формулы (3.13)) эта частица не притягивается слоем и, разумеется, сама его не притягивает.

Так как все тело T_1 может рассматриваться как бесчисленное собрание таких частиц, каждая из которых не притягивается телом T_2, то и все тело T_1 целиком не притягивается телом T_2 и, конечно, само его не притягивает.

Заметим, что сказанное будет также, очевидно, справедливо и по отношению к любому телу T, находящемуся целиком во внутренней полости шарового слоя T_2, обладающего сферической структурой (см. рис. 15), а два таких тела будут вести себя так, как если бы они находились в абсолютно пустом пространстве.

§ 3. Некоторые свойства эллипсоидов

В этом параграфе мы рассмотрим отдельно некоторые геометрические свойства эллипсоидов, которые будут нужны нам в дальнейшем при нахождении силовой функции эллипсоидального тела.

1. Пусть E обозначает некоторый эллипсоид, полуоси которого суть a, b, c. Мы всегда, для определенности, будем считать, что c есть наименьшая полуось, а a — наибольшая, т. е. что

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Примем главные оси эллипсоида E за оси декартовой системы координат с началом в его центре O. Тогда уравнение поверхности E запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.18}$$

В частности, если $b=a$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Oz, т. е. вокруг наименьшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть *сжатым эллипсоидом вращения*.

Если $b=c$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Ox, т. е. вокруг наибольшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть *вытянутым эллипсоидом вращения*.

Наконец, если $c=b=a$, то эллипсоид E превращается в сферу

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

радиуса a с центром в начале координат.

Отметим, что если некоторая точка $P(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности эллипсоида E, то ее координаты удовлетворяют уравнению (3.18), т. е.

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$