внутренней полости шарового слоя T_2, обладающего сферической структурой (см. рис. 15), а два таких тела будут вести себя так, как если бы они находились в абсолютно пустом пространстве.

§ 3. Некоторые свойства эллипсоидов

В этом параграфе мы рассмотрим отдельно некоторые геометрические свойства эллипсоидов, которые будут нужны нам в дальнейшем при нахождении силовой функции эллипсоидального тела.

1. Пусть E обозначает некоторый эллипсоид, полуоси которого суть a, b, c. Мы всегда, для определенности, будем считать, что c есть наименьшая полуось, а a — наибольшая, т. е. что

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Примем главные оси эллипсоида E за оси декартовой системы координат с началом в его центре O. Тогда уравнение поверхности E запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.18}$$

В частности, если $b = a$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Oz, т. е. вокруг наименьшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть *сжатым эллипсоидом вращения*.

Если $b = c$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Ox, т. е. вокруг наибольшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть *вытянутым эллипсоидом вращения*.

Наконец, если $c = b = a$, то эллипсоид E превращается в сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

радиуса a с центром в начале координат.

Отметим, что если некоторая точка $P(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности эллипсоида E, то ее координаты удовлетворяют уравнению (3.18), т. е.

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \equiv 1.$$

Если точка P лежит внутри эллипсоида E, то

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}<1,$$

а для внешней точки имеем

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}>1.$$

Рассмотрим теперь второй эллипсоид E' с полуосями a', b', c', концентрический с E и определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Два эллипсоида E и E' называются подобными, если их соответственные оси пропорциональны, т. е. если

$$a'=ka, \quad b'=kb, \quad c'=kc.$$

Поэтому уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k^2 \tag{3.19}$$

есть уравнение семейства подобных и подобно расположенных эллипсоидов и k есть параметр этого семейства (рис. 16).

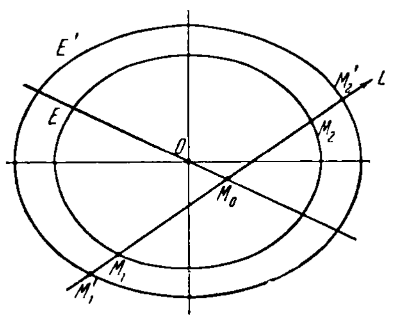

Рис. 16.

Пусть, далее, имеем семейство параллельных прямых, общее направление которых определяется угловыми коэффициентами m, n, p. Уравнения этих прямых можно написать в виде

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Каждая из прямых этого семейства пересекает эллипсоид в двух точках, действительных или мнимых. Отрезок прямой, заключенный между двумя действительными точками пересечения с поверхностью E, называется, как известно, хордой поверхности; геометрическое место середин всех таких параллельных хорд есть плоскость, проходящая через центр эллипсоида и определяемая уравнением

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}+\frac{pz}{c^2}=0.$$

Эта плоскость называется диаметральной плоскостью эллипсоида, сопряженной прямым с угловыми коэффициентами m, n, p.

Очевидно, что все подобные и подобно расположенные эллипсоиды (3.19) имеют общую диаметральную плоскость, сопряженную данному направлению.

Докажем теперь одно простое свойство подобных эллипсоидов. Пусть E' есть эллипсоид, внешний по отношению к E ($k>1$), и пусть P есть любая точка, лежащая внутри E (а следовательно, и внутри E'; см. рис. 16). Проведем через эту точку произвольную прямую $L(m, n, p)$ и обозначим точки пересечения этой прямой с поверхностью E через M_1 и M_2 и с поверхностью E' через M_1' и M_2' соответственно. Тогда

$$\overline{M_1M_1'} = \overline{M_2M_2'}, \tag{3.20}$$

какова бы ни была прямая L.

Действительно, как уже было отмечено, эллипсоиды E и E' имеют одну и ту же диаметральную плоскость, сопряженную направлению L. Следовательно, хорды $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1'M_2'}$ имеют общую середину M_0. Таким образом,

$$\overline{M_0M_1} = \overline{M_0M_2}, \quad \overline{M_0M_1'} = \overline{M_0M_2'},$$

откуда и следует равенство (3.20).

2. Пусть теперь полуоси эллипсоида E', концентрического с E, определяются формулами

$$a'^2 = a^2 + \lambda, \quad b'^2 = b^2 + \lambda,$$
$$c'^2 = c^2 + \lambda.$$

Тогда эллипсоиды E и E' называются **софокусными**, а уравнение *)

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \tag{3.21}$$

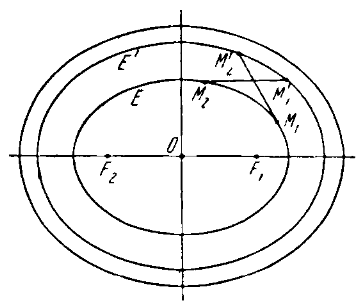

Рис. 17.

есть уравнение семейства софокусных эллипсоидов с параметром λ, который считается положительным (рис. 17).

Заметим, что если параметр λ может принимать какие угодно вещественные значения, то среди поверхностей (3.12) будут не только эллипсоиды ($\lambda > -c^2$), но также и гиперболоиды, однополостные ($-b^2 < \lambda < -c^2$) и двуполостные ($-a^2 < \lambda < b^2$), а поэтому уравнение (3.21) вообще есть уравнение софокусных поверхностей второго порядка (центральных!).

*) Поверхности (3.21) называются софокусными, так как главные сечения этих поверхностей имеют общие фокусы. Действительно, рассмотрим для примера сечения этих поверхностей плоскостью $z=0$. Эти сечения будут эллипсами или гиперболами, фокальные расстояния которых равны $\pm\sqrt{a^2-b^2}$. Так как эти расстояния не зависят от λ, то эти сечения имеют общие фокусы, что и надо было показать.

Пусть E' есть эллипсоид, софокусный эллипсоиду E и внешний по отношению к нему ($\lambda>0$).

Возьмем на E произвольную точку $M(x, y, z)$ и поставим ей в соответствие точку $M'(x', y', z')$ на E', координаты которой определяются из условий

$$x'=\frac{a'}{a}x, \quad y'=\frac{b'}{b}y, \quad z'=\frac{c'}{c}z. \tag{3.22}$$

Ясно, что каждой точке M на E соответствует одна-единственная точка M' на E' *). Докажем теперь следующую теорему:

Теорема Айвори. Если M_1 и M_2 суть точки эллипсоида E, а M_1' и M_2' — соответствующие им точки эллипсоида E', то

$$\overline{M_1M_2'}=\overline{M_2M_1'},$$

каковы бы ни были точки M_1 и M_2.

Действительно, пусть x_1, y_1, z_1 суть координаты M_1, и x_2, y_2, z_2 — координаты M_2. Координаты соответствующих точек, лежащих на E', обозначим также, но со штрихами, так что

$$x_1'=\frac{a'}{a}x_1, \quad y_1'=\frac{b'}{b}y_1, \quad z_1'=\frac{c'}{c}z_1,$$
$$x_2'=\frac{a'}{a}x_2, \quad y_2'=\frac{b'}{b}y_2, \quad z_2'=\frac{c'}{c}z_2.$$

Для расстояний $\overline{M_1M_2'}$ и $\overline{M_2M_1'}$ имеем

$$(\overline{M_1M_2'})^2=(x_1-x_2')^2+(y_1-y_2')^2+(z_1-z_2')^2=$$
$$=\left(x_1-\frac{a'}{a}x_2\right)^2+\left(y_1-\frac{b'}{b}y_2\right)^2+\left(z_1-\frac{c'}{c}z_2\right)^2,$$
$$(\overline{M_2M_1'})^2=(x_2-x_1')^2+(y_2-y_1')^2+(z_2-z_1')^2=$$
$$=\left(x_2-\frac{a'}{a}x_1\right)^2+\left(y_2-\frac{b'}{b}y_1\right)^2+\left(z_2-\frac{c'}{c}z_1\right)^2,$$

откуда

$$(\overline{M_1M_2'})^2-(\overline{M_2M_1'})^2=\left(1-\frac{a'^2}{a^2}\right)x_1^2+\left(\frac{a'^2}{a^2}-1\right)x_2^2+$$
$$+\left(1-\frac{b'^2}{b^2}\right)y_1^2+\left(\frac{b'^2}{b^2}-1\right)y_2^2+\left(1-\frac{c'^2}{c^2}\right)z_1^2+\left(\frac{c'^2}{c^2}-1\right)z_2^2=$$
$$=-\lambda\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)+\lambda\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}\right),$$

*) Соответствие, определяемое равенствами (3.22), называется иногда соответствием в смысле Айвори, или, короче, аффинностью Айвори.

а так как точки M_1 и M_2 лежат на эллипсоиде E, то

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\equiv 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}\equiv 1,$$

и, следовательно,

$$(\overline{M_1M_2'})^2-(\overline{M_2M_1'})^2=0,$$

т. е. расстояния $\overline{M_1M_2'}$ и $\overline{M_2M_1'}$ равны.

Таким образом, теорема Айвори доказана.

§ 4. Эллипсоидальные координаты

1. Докажем теперь следующую теорему:

Теорема. Через каждую точку P', внешнюю по отношению к эллипсоиду E, проходит только один эллипсоид E', софокусный эллипсоиду E.

Пусть $P'(x', y', z')$ есть точка пространства, внешняя для E, т. е. пусть

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}>1.$$

Так как семейство эллипсоидов, софокусных эллипсоиду E, определяется уравнением (3.21), в котором λ есть параметр семейства, то, чтобы найти эллипсоид E', проходящий через точку P', нужно определить соответствующее значение параметра λ из уравнения

$$F(\lambda)=\frac{x'^2}{a^2+\lambda}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda}+\frac{z'^2}{c^2+\lambda}-1=0, \tag{3.23}$$

в котором координаты точки P' и полуоси эллипсоида E суть величины данные.

Покажем, что уравнение (3.23), являющееся кубичным относительно неизвестной λ, всегда имеет три вещественных корня, из которых только один положителен.

Для этого отметим прежде всего, что производная по λ от функции $F(\lambda)$, т. е.

$$F'(\lambda)=-\frac{x'^2}{(a^2+\lambda)^2}-\frac{y'^2}{(b^2+\lambda)^2}-\frac{z'^2}{(c^2+\lambda)^2}$$

есть величина всегда отрицательная. Следовательно, функция $F(\lambda)$ есть монотонно убывающая функция, когда λ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Далее, функция $F(\lambda)$ имеет три точки разрыва второго рода при $\lambda=-c^2$, $-b^2$, $-a^2$, где функция имеет бесконечно большое значение $(\pm\infty)$.