а так как точки M_1 и M_2 лежат на эллипсоиде E, то

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\equiv 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}\equiv 1,$$

и, следовательно,

$$(\overline{M_1M_2'})^2-(\overline{M_2M_1'})^2=0,$$

т. е. расстояния $\overline{M_1M_2'}$ и $\overline{M_2M_1'}$ равны.

Таким образом, теорема Айвори доказана.

§ 4. Эллипсоидальные координаты

1. Докажем теперь следующую теорему:

Теорема. Через каждую точку P', внешнюю по отношению к эллипсоиду E, проходит только один эллипсоид E', софокусный эллипсоиду E.

Пусть $P'(x', y', z')$ есть точка пространства, внешняя для E, т. е. пусть

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}>1.$$

Так как семейство эллипсоидов, софокусных эллипсоиду E, определяется уравнением (3.21), в котором λ есть параметр семейства, то, чтобы найти эллипсоид E', проходящий через точку P', нужно определить соответствующее значение параметра λ из уравнения

$$F(\lambda)=\frac{x'^2}{a^2+\lambda}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda}+\frac{z'^2}{c^2+\lambda}-1=0, \qquad (3.23)$$

в котором координаты точки P' и полуоси эллипсоида E суть величины данные.

Покажем, что уравнение (3.23), являющееся кубичным относительно неизвестной λ, всегда имеет три вещественных корня, из которых только один положителен.

Для этого отметим прежде всего, что производная по λ от функции $F(\lambda)$, т. е.

$$F'(\lambda)=-\frac{x'^2}{(a^2+\lambda)^2}-\frac{y'^2}{(b^2+\lambda)^2}-\frac{z'^2}{(c^2+\lambda)^2}$$

есть величина всегда отрицательная. Следовательно, функция $F(\lambda)$ есть монотонно убывающая функция, когда λ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Далее, функция $F(\lambda)$ имеет три точки разрыва второго рода при $\lambda=-c^2$, $-b^2$, $-a^2$, где функция имеет бесконечно большое значение ($\pm\infty$).

Тогда из следующей таблицы, показывающей знак функции $F(\lambda)$ для некоторых значений λ:

λ	знак $F(\lambda)$	λ	знак $F(\lambda)$
$-\infty$	$-$	$-c^2-\varepsilon$	$-$
$-a^2-\varepsilon$	$-$	$-c^2+\varepsilon$	$+$
$-a^2+\varepsilon$	$+$	0	$+$
$-b^2-\varepsilon$	$-$	$+\infty$	$-$
$-b^2+\varepsilon$	$+$		

где ε есть любое положительное число, меньшее чем c^2, мы немедленно усматриваем, что функция $F(\lambda)$ обращается в нуль

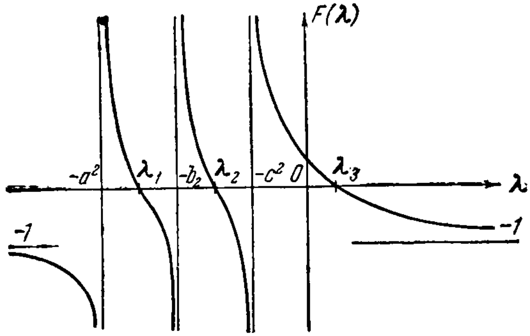

Рис. 18.

три раза на промежутке от $\lambda=-\infty$ до $\lambda=+\infty$ при значениях параметра, удовлетворяющих неравенствам (рис. 18)

$$-a^2<\lambda_1<-b^2, \quad -b^2<\lambda_2<-c^2, \quad 0<\lambda_3<+\infty.$$

Все эти значения вещественны, причем $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ и $\lambda_3>0$. Значение λ_3 соответствует эллипсоиду E', софокусному с E и проходящему через точку P'. Таким образом, теорема доказана.

Заметим еще, что когда точка P' перемещается в пространстве, приближаясь к поверхности эллипсоида E, то корень λ_3 уменьшается, приближаясь к нулю, а когда точка P' удаляется в бесконечность, то λ_3 возрастает и также стремится к $+\infty$. Наконец, когда точка P' переходит внутрь эллипсоида и, перемещаясь внутри него, приближается к его центру O, то λ_3 делается отрицательным и стремится к $-c^2$, когда $P'\to 0$.

Нетрудно сообразить, что при этом эллипсоид E' делается все более и более плоским и вырождается в пределе в эллипс (точнее, в эллиптический диск) с полуосями a^2-c^2 и b^2-c^2.

Но при любом λ_3, содержащемся в промежутке $(-c^2, +\infty)$, мы имеем

$$\lambda_3+c^2>0,\quad \lambda_3+b^2>0,\quad \lambda_3+a^2>0,$$

и поэтому поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая корню λ_3, всегда есть эллипсоид.

Далее, легко видеть, что

$$\lambda_2+c^2<0,\quad \lambda_2+b^2>0,\quad \lambda_2+a^2>0,$$

и поэтому поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая корню λ_2, всегда есть однополостный гиперболоид. Наконец, мы имеем

$$\lambda_1+c^2<0,\quad \lambda_1+b^2<0,\quad \lambda_1+a^2>0,$$

а следовательно, поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая корню λ_1, есть всегда двуполостный гиперболоид.

2. Итак, через любую точку пространства можно провести три различные центральные поверхности второго порядка, софокусные данному эллипсоиду E. Одна из этих трех поверхностей есть также эллипсоид, другая — однополостный гиперболоид, а третья — двуполостный гиперболоид. Уравнения этих трех поверхностей можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1(x, y, z; \lambda_1) &= 0 = \frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_1}-1,\\
\Phi_2(x, y, z; \lambda_2) &= 0 = \frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_2}-1,\\
\Phi_3(x, y, z; \lambda_3) &= 0 = \frac{x^2}{a^2+\lambda_3}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_3}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_3}-1.
\end{aligned}\right\}\qquad (3.24)$$

Нетрудно убедиться, что (3.24) образует триортогональное семейство поверхностей второго порядка, т. е. что любые две поверхности, соответствующие различным параметрам, пересекаются под прямым углом.

В самом деле, угол φ между двумя различными поверхностями (3.24) в точках их пересечения равен углу между нормалями к этим поверхностям, а следовательно, $(j\neq i=1, 2, 3)$,

$$\cos\varphi=\frac{\pm 1}{N_iN_j}\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\right],$$

где

$$N_i=\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\right)^2}.$$

Поэтому находим

$$\cos\varphi = \frac{\pm 4}{N_i N_j}\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda_i)(a^2+\lambda_j)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_i)(b^2+\lambda_j)} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_i)(c^2+\lambda_j)}\right].$$

Но для всякой точки, принадлежащей обеим поверхностям (точки на линии их пересечения) будет удовлетворяться следующее соотношение, получающееся из (3.24):

$$\frac{\Phi_i-\Phi_j}{\lambda_j-\lambda_i} = \left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda_i)(a^2+\lambda_j)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_i)(b^2+\lambda_j)} + \right.$$
$$\left. + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_i)(c^2+\lambda_j)}\right] = 0.$$

Отсюда следует, что $\cos\varphi=0$ и поверхности $\Phi_i=0$ и $\Phi_j=0$ $(i, j=1, 2, 3;\ j\neq i)$ действительно ортогональны.

Разрешая теперь уравнения (3.24) относительно x^2, y^2, z^2, мы получим

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

Таким образом, каждой точке пространства соответствуют три числа λ_1, λ_2, λ_3, связанные с декартовыми координатами этой точки формулами (3.25), которые отличаются от формул § 1 только обозначениями.

Следовательно, если основной координатной поверхностью является поверхность данного эллипсоида E, то числа λ_1, λ_2, λ_3 суть эллипсоидальные координаты точки P.

3. Возвращаясь к уравнению (3.23), будем рассматривать координаты точки P как независимые переменные, а λ — как их функцию. Отбрасывая штрихи у координат, напишем уравнение, определяющее λ как функцию x, y, z, в виде

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0. \qquad (3.23')$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения дифференциальных параметров Ламе для функции $\lambda(x, y, z)$, определяемой уравнением (3.23′). Дифференцируя это уравнение по x, y, z соответственно (считая λ их функцией), мы получим

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{2x}{(a^2+\lambda)Q}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{2y}{(b^2+\lambda)Q}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{2z}{(c^2+\lambda)Q},$$

где положено для сокращения

$$Q = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

Вторичное дифференцирование дает, например,

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=\frac{2}{(a^2+\lambda)Q}-\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^3Q^2}+\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^2Q^3}\cdot\overline{Q},$$

где

$$\overline{Q}=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3}$$

и аналогичные выражения для двух других производных.

Теперь находим без труда *)

$$\Delta_1\lambda=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{Q} \tag{3.25'}$$

и

$$\nabla\lambda=\frac{2}{Q}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]. \tag{3.26}$$

Полагая еще

$$R(\lambda)=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

мы можем представить $\nabla\lambda$ в виде

$$\nabla\lambda=\frac{4}{Q}\,\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda}. \tag{3.27}$$

Пусть теперь V есть данная функция от λ, которая в силу уравнения (3.23) в свою очередь есть функция от x, y, z.

Найдем оператор Лапласа для функции V. Из формул

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{dV}{d\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\frac{dV}{d\lambda}\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$$

и им аналогичных для производных по y и z, мы получаем

$$\nabla V=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\Delta_1\lambda+\frac{dV}{d\lambda}\nabla\lambda,$$

что ввиду (3.25') и (3.26) можно также представить в виде

$$\nabla V=\frac{4}{Q}\left[\frac{d^2V}{d\lambda^2}+\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda}\,\frac{dV}{d\lambda}\right]. \tag{3.28}$$

§ 5. Притяжение однородного эллипсоида. Случай внутренней точки

Задача о нахождении силовой функции и составляющих силы притяжения однородного эллипсоида издавна была одной из важнейших задач теории притяжения, которой посвящали свои труды многие выдающиеся ученые. Лаплас, Лагранж, Маклорен, Айвори, Якоби, Гаусс, Дирихле, Ляпунов — вот далеко не

*) См. формулы (3.4') § 1 этой главы.