Вторичное дифференцирование дает, например,

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=\frac{2}{(a^2+\lambda)\,Q}-\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^3\,Q^2}+\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^2\,Q^3}\cdot\overline{Q},$$

где

$$\overline{Q}=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3}$$

и аналогичные выражения для двух других производных.

Теперь находим без труда *)

$$\Delta_1\lambda=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{Q} \qquad (3.25')$$

и

$$\nabla\lambda=\frac{2}{Q}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]. \qquad (3.26)$$

Полагая еще

$$R(\lambda)=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

мы можем представить $\nabla\lambda$ в виде

$$\nabla\lambda=\frac{4}{Q}\,\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda}. \qquad (3.27)$$

Пусть теперь V есть данная функция от λ, которая в силу уравнения (3.23) в свою очередь есть функция от x, y, z.

Найдем оператор Лапласа для функции V. Из формул

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{dV}{d\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\frac{dV}{d\lambda}\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$$

и им аналогичных для производных по y и z, мы получаем

$$\nabla V=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\,\Delta_1\lambda+\frac{dV}{d\lambda}\,\nabla\lambda,$$

что ввиду (3.25′) и (3.26) можно также представить в виде

$$\nabla V=\frac{4}{Q}\left[\frac{d^2V}{d\lambda^2}+\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda}\,\frac{dV}{d\lambda}\right]. \qquad (3.28)$$

§ 5. Притяжение однородного эллипсоида. Случай внутренней точки

Задача о нахождении силовой функции и составляющих силы притяжения однородного эллипсоида издавна была одной из важнейших задач теории притяжения, которой посвящали свои труды многие выдающиеся ученые. Лаплас, Лагранж, Маклорен, Айвори, Якоби, Гаусс, Дирихле, Ляпунов — вот далеко не

*) См. формулы (3.4′) § 1 этой главы.

полный список великих и славных имен, связанных с этой, необходимой для астрономических и геофизических приложений, задачей.

Лагранж, Гаусс и Дирихле дали методы, позволяющие найти выражение для силовой функции однородного эллипсоида для случая, когда притягиваемая точка лежит внутри него. Затем теоремы Лапласа, Айвори и Маклорена позволили найти, почти уже без вычислений, силовую функцию и для внешней точки.

Обычно в учебниках или руководствах по теории потенциала излагается классический метод Лагранжа или метод Гаусса. Эти методы заключаются в нахождении составляющих сил притяжения, т. е. частных производных от силовой функции, а затем уже в определении самой силовой функции путем интегрирования ее полного дифференциала. Здесь мы изложим способ непосредственного вычисления самой силовой функции, а составляющие силы найдем затем обычным путем при помощи дифференцирования *).

1. Итак, рассмотрим однородное тело T с плотностью $\delta=\text{const}$, ограниченное поверхностью эллипсоида E.

Для упрощения выкладок возьмем систему координат с началом в центре эллипсоида E, оси которой направлены по главным осям эллипсоида. Тогда уравнение поверхности эллипсоида запишется в виде (3.18), причем по-прежнему считаем, что

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Пусть $P(x, y, z)$ есть материальная точка единичной массы, лежащая внутри эллипсоида, так что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1.$$

Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, пропорциональны, как показал Лагранж, координатам этой точки, а коэффициенты пропорциональности выражаются обыкновенными однократными интегралами, приводящимися к эллиптическим. Отсюда следует, что силовая функция эллипсоида на внутреннюю точку представляется в виде квадратичной формы от координат точки P, содержащей только квадраты этих величин.

Как уже было сказано, мы выведем это выражение для силовой функции путем непосредственного вычисления. Для этого вообразим систему полярных координат с началом в точке P

---

*) Аналогичный способ нахождения силовой функции однородного эллипсоида изложен в книге Мультон, Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935. Способы Лагранжа и Гаусса см., например, в книге Л. Н. Сретенского, Теория ньютоновского потенциала, или в фундаментальном трактате по небесной механике Тиссерана.

и воспользуемся для нахождения силовой функции $U(P)$ формулой, приведенной в сноске на стр. 73 и вытекающей из формулы (2.15).

Таким образом, можем написать

$$U(P)=\frac{1}{2}f\delta\iint\limits_{(\Omega)} R^2\,d\omega, \tag{3.29}$$

где интегрирование распространено на всю сферу Ω единичного радиуса, а R есть переменное расстояние от точки P до точки $M(x', y', z')$ поверхности эллипсоида E (рис. 19). Обозначая, как и раньше, направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM}$ через α, β, γ, мы имеем

$$x'=x+R\alpha, \quad y'=y+R\beta,$$
$$z'=z+R\gamma.$$

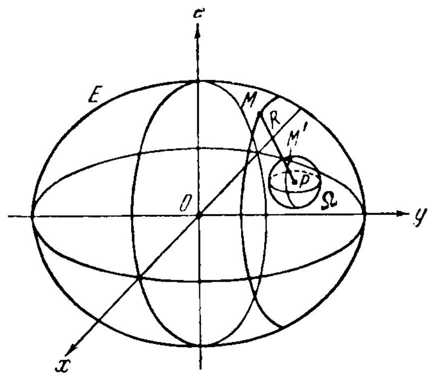

Рис. 19.

Подставляя эти выражения для координат в уравнение

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \tag{E}$$

эллипсоида (E), мы получим квадратное уравнение относительно R:

$$AR^2+2BR+C=0, \tag{3.30}$$

коэффициенты которого имеют приводимые ниже значения:

$$A=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>0,$$

$$B=\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2},$$

$$C=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1<0,$$

откуда находим, что дискриминант $B^2-AC>0$, т. е. один корень уравнения (3.30) положителен, а другой отрицателен. Так как R есть величина заведомо положительная, то имеем

$$R=-\frac{B}{A}+\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A},$$

откуда

$$R^2=\frac{2B^2-AC}{A^2}-\frac{2B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}.$$

Подставив найденное выражение для R^2 в формулу для силовой функции (3.29), мы получим

$$U(P)=f\delta\left\{\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B^2\,d\omega}{A^2}-\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{C\,d\omega}{A}-\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}\,d\omega\right\}.$$

Покажем, что последний интеграл равен нулю. Действительно, заменяя B его выражением и полагая для сокращения

$$\Phi(M)=\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A^2},$$

мы можем написать

$$\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}\,d\omega=\frac{x}{a^2}\iint\limits_{(\Omega)}\alpha\Phi(M)\,d\omega+\\+\frac{y}{b^2}\iint\limits_{(\Omega)}\beta\Phi(M)\,d\omega+\frac{z}{c^2}\iint\limits_{(\Omega)}\gamma\Phi(M)\,d\omega.$$

Воображая теперь плоскость, проходящую через точку P параллельно плоскости xOy, мы разобьем всю сферу Ω на две половинки — «верхнюю» Σ и «нижнюю» Σ' (рис. 20). Пусть M' есть текущая точка полусферы Σ', симметричная текущей точке полусферы Σ относительно точки P. Тогда направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM'}$ будут равны соответственно $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, а $\Phi(M')=\Phi(M)$; поэтому, например, для первого интеграла в предыдущей формуле мы получим

$$\iint\limits_{(\Omega)}\alpha\Phi(M)\,d\omega=\iint\limits_{(\Sigma)}\alpha\Phi(M)\,d\omega+\iint\limits_{(\Sigma')}(-\alpha)\Phi(M')\,d\omega=0.$$

Аналогично показывается равенство нулю и остальных двух интегралов.

Теперь можем написать

$$U(P)=f\delta\left\{\bar{U}-\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{C\,d\omega}{A}+\frac{x^2}{a^4}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\alpha^2\,d\omega}{A^2}+\right.\\\left.+\frac{y^2}{b^4}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\beta^2\,d\omega}{A^2}+\frac{z^2}{c^4}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\gamma^2\,d\omega}{A^2}\right\},$$

где положено

$$\bar{U}=\frac{2xy}{a^2b^2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\alpha\beta\,d\omega}{A^2}+\frac{2xz}{a^2c^2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\alpha\gamma\,d\omega}{A^2}+\frac{2yz}{b^2c^2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\beta\gamma\,d\omega}{A^2}.$$

Но каждый из трех последних интегралов, как легко убедиться, также равен нулю. Действительно, возьмем на полусфере Σ'

текущую точку M', симметричную точке M полусферы Σ относительно плоскости xOy (см. рис. 20).

Так как направляющими косинусами прямой $\overrightarrow{PM'}$ будут теперь α, β, $-\gamma$, то A^2 будет иметь одно и то же значение в точках M и M', а поэтому

$$\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha\gamma\, d\omega}{A^2} = \iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\alpha\gamma\, d\omega}{A^2} + \iint\limits_{(\Sigma')} \frac{\alpha(-\gamma)\, d\omega}{A^2} = 0.$$

Точно так же показывается, что равны нулю и два других

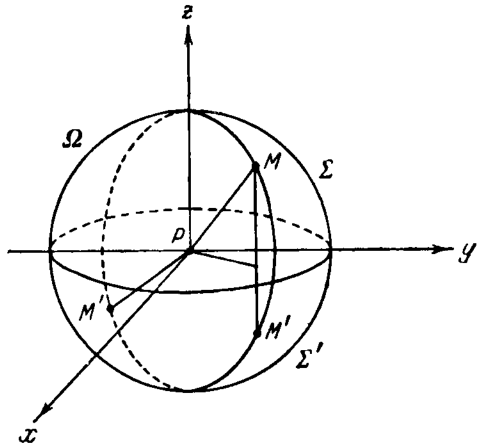

Рис. 20.

интеграла. Следовательно, $\overline{U}=0$, а заменяя теперь C его значением, мы представим силовую функцию в виде

$$U(P) = f\delta\,[U_0 + U_1x^2 + U_2y^2 + U_3z^2], \tag{3.30'}$$

где коэффициенты имеют следующие значения:

$$U_0 = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A}, \quad U_1 = \frac{1}{a^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha^2\, d\omega}{A^2} - \frac{1}{2a^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A},$$

$$U_2 = \frac{1}{b^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\beta^2\, d\omega}{A^2} - \frac{1}{2b^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A}, \quad U_3 = \frac{1}{c^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\gamma^2\, d\omega}{A^2} - \frac{1}{2c^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A}.$$

Легко проверить теперь, что

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{U_0}{a}\right), \quad U_2 = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{U_0}{b}\right), \quad U_3 = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{U_0}{c}\right),$$

а поэтому нахождение коэффициентов формы (3.30) сводится к вычислению одного-единственного интеграла U_0

2. Чтобы получить классическое выражение для силовой функции эллипсоида, введем вместо направляющих косинусов α, β, γ два независимых угла ε, u, полагая

$$\alpha=\cos\varepsilon, \quad \beta=\sin\varepsilon\cos u, \quad \gamma=\sin\varepsilon\sin u.$$

Тогда

$$d\omega=\sin\varepsilon\, d\varepsilon\, du$$

и

$$A=\left(\frac{\cos^2\varepsilon}{a^2}+\frac{\sin^2\varepsilon}{b^2}\right)\cos^2 u+\left(\frac{\cos^2\varepsilon}{a^2}+\frac{\sin^2\varepsilon}{c^2}\right)\sin^2 u=p\cos^2 u+q\sin^2 u,$$

и мы найдем

$$U_0=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin\varepsilon\, d\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}\frac{du}{p\cos^2 u+q\sin^2 u}.$$

Так как

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{du}{p\cos^2 u+q\sin^2 u}=\frac{4}{q}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\operatorname{tg} u}{\frac{p}{q}+\operatorname{tg}^2 u}=\frac{4}{\sqrt{pq}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{p/q}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{pq}},$$

то

$$U_0=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{pq}}=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{pq}}.$$

Вводя, наконец, вместо ε новую переменную интегрирования s при помощи подстановки

$$\cos\varepsilon=\frac{a}{\sqrt{a^2+s}}, \quad \sin\varepsilon\, d\varepsilon=\frac{a\, ds}{2(a^2+s)^{3/2}},$$

мы получим

$$U_0=\pi abc\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}=\pi abc\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{R(s)}, \tag{3.31}$$

после чего немедленно находим

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{U_0}{a}\right) = -\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\,R(s)}, \\ U_2 &= \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{U_0}{b}\right) = -\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\,R(s)}, \\ U_3 &= \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{U_0}{c}\right) = -\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\,R(s)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

где, как и в предыдущем параграфе, положено

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}.$$

Теперь с помощью формул (3.31) и (3.32) мы можем представить формулу (3.30′) в следующем классическом виде:

$$U(P) = f\,\delta\pi abc \int_0^\infty \left[1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right] \frac{ds}{R(s)}. \tag{3.33}$$

Отметим, что U_0 есть величина существенно положительная, а коэффициенты U_1, U_2, U_3, наоборот, суть числа заведомо отрицательные. Отсюда следует, что значение силовой функции в центре эллипсоида, т. е.

$$U(0,\,0,\,0) = f\,\delta U_0 = f\,\delta\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{R(s)}$$

есть ее максимум, что является иллюстрацией теоремы, доказанной в § 9 гл. II (принцип максимума силовой функции).

Теперь сразу получаем составляющие силы притяжения, действующей на точку P, лежащую внутри эллипсоида E:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = 2f\,\delta U_1 \cdot x, \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = 2f\,\delta U_2 \cdot y, \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = 2f\,\delta U_3 \cdot z \end{aligned}\right\}, \tag{3.34}$$

каждая из которых пропорциональна соответствующей координате притягиваемой точки.

3. Докажем теперь общую теорему Ньютона, справедливость которой была установлена ранее для шарового слоя.

Теорема Ньютона. Однородный слой, заключенный между двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами, не оказывает никакого притяжения на материальную точку, находящуюся во внутренней полости слоя.

Пусть даны два концентрических, подобных и подобно расположенных эллипсоида E и E' с полуосями соответственно

$$a, \quad b, \quad c, \quad a' = ka, \quad b' = kb, \quad c' = kc \qquad (k > 1).$$

Обозначим силовую функцию однородного слоя с плотностью δ, заключенного между эллипсоидами E и E', через V. Очевидно, что эта силовая функция может рассматриваться как разность силовых функций двух полных эллипсоидов (однородных, с плотностью δ) E' и E, т. е. мы можем написать

$$V(P) = f\delta\,[V_0 + V_1x^2 + V_2y^2 + V_3z^2],$$

где

$$V_0 = U_0' - U_0, \quad V_1 = U_1' - U_1, \quad V_2 = U_2' - U_2, \quad V_3 = U_3' - U_3.$$

Полагая теперь аналогично предыдущему

$$R'(s') = \sqrt{(a'^2 + s')(b'^2 + s')(c'^2 + s')},$$

мы имеем для U_0', U_1', ... следующие выражения:

$$U_0' = \pi a'b'c' \int\limits_0^\infty \frac{ds'}{R'(s')}, \quad U_1' = -\pi a'b'c' \int\limits_0^\infty \frac{ds'}{(a'^2 + s')\,R'(s')}, \ \ldots$$

Делая в этих интегралах подстановку $s' = k^2 s$, мы найдем

$$U_0' = k^2 U_0, \quad U_1' = U_1, \quad U_2' = U_2, \quad U_3' = U_3,$$

откуда

$$V_0 = (k^2 - 1)\,U_0, \quad V_1 = V_2 = V_3 = 0,$$

и, следовательно,

$$V(P) = f\delta\,(k^2 - 1)\,U_0 = \text{const}.$$

Таким образом, составляющие силы притяжения, действующей на точку P, будут равны нулю и теорема Ньютона доказана.

Если во внутренней полости однородного эллипсоидального слоя находится не материальная точка (частица), а некоторое материальное тело (т. е. совокупность множества материальных частиц), то это тело также не испытывает притяжения со стороны слоя и, разумеется, само не оказывает на этот слой никакого влияния.

Примечание. Можно показать, как это сделано Дивом*), что теорема Ньютона допускает обращение. А именно, Див доказал, что если материальная точка, находящаяся во внутренней пустой полости некоторого однородного тела, ограниченного подобными поверхностями, не испытывает никакого притяжения, то это тело необходимо есть однородный эллипсоидальный слой, ограниченный двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами.

§ 6. Притяжение однородным эллипсоидом внешней точки

Прежде чем перейти к нахождению силовой функции однородного эллипсоида для случая, когда притягиваемая точка лежит вне эллипсоида, рассмотрим сначала три вспомогательные теоремы, одна из которых принадлежит Айвори, другая — Лапласу, а третья — Маклорену.

1. Пусть даны два концентрических, подобно расположенных и софокусных эллипсоида E и E' с полуосями a, b, c, a', b', c' соответственно. Вообразим, что оба эллипсоида заполнены притягивающей материей с плотностью $\delta = \text{const}$. Рассмотрим некоторую определенную точку $P(x, y, z)$ поверхности эллипсоида E и соответствующую ей (в смысле Айвори) точку $P'(x', y', z')$ поверхности эллипсоида E'. Тогда координаты обеих точек связаны соотношениями

$$x' = \frac{a'}{a} x, \quad y' = \frac{b'}{b} y, \quad z' = \frac{c'}{c} z.$$

Установив это, сравним притяжение, которое оказывает эллипсоид E на материальную частицу единичной массы, помещенную в точке P', с притяжением, которое оказывает эллипсоид E' на частицу той же массы, помещенную в точке P.

Для этого вычислим составляющие сил, действующих на точки P' и P по формулам Гаусса (см. сноску на стр. 81), которые дают

$$X(P') = -f\delta \iint\limits_{(E)} \frac{\alpha\, d\sigma}{\Delta},$$

где Δ есть расстояние между точкой P' и текущей точкой $M(x_1, y_1, z_1)$ поверхности E, а α есть направляющий косинус внешней нормали к поверхности E в точке M; аналогично,

$$X'(P) = -f\delta \iint\limits_{(E')} \frac{\alpha'\, d\sigma'}{\Delta'},$$

*) P. Dive, Attraction des ellipsoides homogénes et réciproque d'un théoreme de Newton, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. LIX, 1931.