Примечание. Можно показать, как это сделано Дивом*), что теорема Ньютона допускает обращение. А именно, Див доказал, что если материальная точка, находящаяся во внутренней пустой полости некоторого однородного тела, ограниченного подобными поверхностями, не испытывает никакого притяжения, то это тело необходимо есть однородный эллипсоидальный слой, ограниченный двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами.

§ 6. Притяжение однородным эллипсоидом внешней точки

Прежде чем перейти к нахождению силовой функции однородного эллипсоида для случая, когда притягиваемая точка лежит вне эллипсоида, рассмотрим сначала три вспомогательные теоремы, одна из которых принадлежит Айвори, другая — Лапласу, а третья — Маклорену.

1. Пусть даны два концентрических, подобно расположенных и софокусных эллипсоида E и E' с полуосями a, b, c, a', b', c' соответственно. Вообразим, что оба эллипсоида заполнены притягивающей материей с плотностью $\delta=\mathrm{const}$. Рассмотрим некоторую определенную точку $P(x, y, z)$ поверхности эллипсоида E и соответствующую ей (в смысле Айвори) точку $P'(x', y', z')$ поверхности эллипсоида E'. Тогда координаты обеих точек связаны соотношениями

$$x'=\frac{a'}{a}x, \quad y'=\frac{b'}{b}y, \quad z'=\frac{c'}{c}z.$$

Установив это, сравним притяжение, которое оказывает эллипсоид E на материальную частицу единичной массы, помещенную в точке P', с притяжением, которое оказывает эллипсоид E' на частицу той же массы, помещенную в точке P.

Для этого вычислим составляющие сил, действующих на точки P' и P по формулам Гаусса (см. сноску на стр. 81), которые дают

$$X(P')=-f\delta\iint\limits_{(E)}\frac{\alpha\,d\sigma}{\Delta},$$

где Δ есть расстояние между точкой P' и текущей точкой $M(x_1, y_1, z_1)$ поверхности E, а α есть направляющий косинус внешней нормали к поверхности E в точке M; аналогично,

$$X'(P)=-f\delta\iint\limits_{(E')}\frac{\alpha'\,d\sigma'}{\Delta'},$$

*) P. Dive, Attraction des ellipsoides homogénes et réciproque d'un théoreme de Newton, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. LIX, 1931.

где Δ' — расстояние от точки P до текущей точки $M'(x_1', y_1', z_1')$ поверхности E', а α' есть направляющий косинус внешней нормали к E' в точке M'.

Так как каждой точке E соответствует (в смысле Айвори) единственная точка на E', то мы можем считать, что текущая точка M' на E' соответствует текущей точке M на E, т. е. что

$$x_1' = \frac{a'}{a} x_1, \quad y_1' = \frac{b'}{b} y_1, \quad z_1' = \frac{c'}{c} z_1.$$

Так как точки P и P' также соответствуют друг другу, то по теореме Айвори, доказанной в § 3, мы имеем

$$\overline{PM'} = \overline{P'M}.$$

Заметим теперь, что $\alpha d\sigma$ есть проекция площади $d\sigma$ поверхности E на координатную плоскость yOz. Поэтому мы можем положить $\alpha d\sigma = dy_1\, dz_1$ и написать

$$X(P') = -2f\delta \iint\limits_{(Э)} \frac{dy_1\, dz_1}{\Delta},$$

где интегрирование распространено на площадь $Э$ эллипса, являющегося сечением поверхности E плоскостью yOz.

Точно так же

$$X'(P) = -2f\delta \iint\limits_{(Э')} \frac{dy_1'\, dz_1'}{\Delta'},$$

где интегрирование распространено на площадь $Э'$ эллипса, являющегося сечением поверхности E' той же плоскостью yOz. Но, очевидно, что

$$dy_1'\, dz_1' = \frac{b'c'}{bc} dy_1\, dz_1$$

и, кроме того,

$$\Delta' = \Delta,$$

так что выражение для составляющей $X'(P)$ принимает вид

$$X'(P) = -2f\delta \frac{b'c'}{bc} \iint\limits_{(Э)} \frac{dy_1\, dz_1}{\Delta}.$$

Отсюда выводим

$$X'(P) = \frac{b'c'}{bc} X(P'), \quad Y'(P) = \frac{c'a'}{ca} Y(P'), \quad Z'(P) = \frac{a'b'}{ab} Z(P),$$

причем два последних равенства написаны по очевидной аналогии.

Таким образом, доказана следующая теорема, принадлежащая Айвори.

Теорема Айвори. Составляющие по одной и той же оси сил притяжения, действующих на частицы одинаковой массы, помещенные в соответственных точках двух софокусных эллипсоидов, относятся как площади главных сечений эллипсоидов, перпендикулярных к этой оси.

2. Переходим ко второй вспомогательной теореме, которая может рассматриваться как следствие только что доказанной теоремы Айвори.

Рассмотрим для этого два концентрических, подобно расположенных софокусных эллипсоида E_1 и E_2 с полуосями a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 соответственно. Представим себе, что эллипсоид E_1 заполнен однородной притягивающей материей с плотностью δ_1, а эллипсоид E_2 — материей с плотностью δ_2.

Возьмем точку $P'(x', y', z')$, лежащую вне обоих эллипсоидов, и пусть E' есть эллипсоид с полуосями a', b', c', проходящий через эту точку и софокусный эллипсоидам E_1 и E_2 (рис. 21).

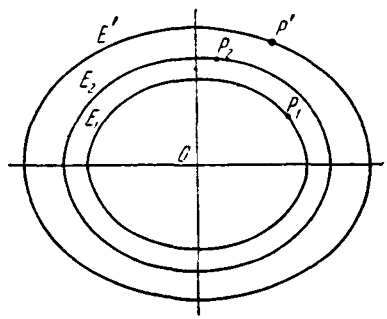

Рис. 21.

Вообразим, что E' заполняется однородной материей с плотностью δ_1 или с плотностью δ_2.

Пусть теперь P_1 и P_2 суть точки, лежащие соответственно на E_1 и E_2 и соответствующие (в смысле Айвори) точке P' на E'. Тогда

$$x' = \frac{a'}{a_1} x_1, \quad y' = \frac{b'}{b_1} y_1, \quad z' = \frac{c'}{c_1} z_1$$

и

$$x' = \frac{a'}{a_2} x_2, \quad y' = \frac{b'}{b_2} y_2, \quad z' = \frac{c'}{c_2} z_2,$$

откуда имеем также

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Поместим теперь в точках P', P_1, P_2 материальные частицы единичной массы и обозначим через $X_1(P')$, $X_2(P')$ составляющие сил, действующих на точку P' со стороны эллипсоидов E_1 и E_2. Далее, обозначим через $X_1'(P_1)$ и $X_2'(P_2)$ составляющие сил, действующих на точки P_1 и P_2 соответственно со стороны эллипсоида E', заполненного материей с плотностью δ_1 или с плотностью δ_2. Тогда по теореме Айвори будем иметь

$$X_1(P')=\frac{b_1c_1}{b'c'}X_1'(P_1), \quad X_2(P')=\frac{b_2c_2}{b'c'}X_2'(P_2),$$

откуда

$$X_1(P'):X_2(P')=b_1c_1X_1'(P_1):b_2c_2X_2'(P_2).$$

Так как формулы (3.34), примененные к точкам P_1 и P_2, лежащим внутри эллипсоида E', дают

$$X_1'(P_1):X_2'(P_2)=\delta_1x_1:\delta_2x_2=\delta_1a_1:\delta_2a_2,$$

то имеем *)

$$X_1(P'):X_2(P')=\delta_1a_1b_1c_1:\delta_2a_2b_2c_2=m_1:m_2$$

и совершенно так же найдем

$$Y_1(P'):Y_2(P')=m_1:m_2, \quad Z_1(P'):Z_2(P')=m_1:m_2,$$

откуда и вытекает

Теорема Лапласа. Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, направления которых совпадают и величины которых пропорциональны массам эллипсоидов.

Остается последняя вспомогательная теорема. Обозначим через $U_1(P)$ и $U_2(P)$ силовые функции двух софокусных эллипсоидов E_1 и E_2 на точку $P(x, y, z)$, внешнюю для них обоих. Тогда по теореме Лапласа можем написать

$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial x}=0, \quad \frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial y}-\frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial y}=0,$$
$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial z}-\frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial z}=0,$$

откуда имеем

$$\frac{U_1}{m_1}-\frac{U_2}{m_2}=\text{const}.$$

Но по свойствам силовой функции во внешнем пространстве U_1 и U_2 обращаются в нули, когда точка P удаляется в бесконечность. Поэтому постоянная в правой части равенства есть нуль, и мы имеем

$$U_1:U_2=m_1:m_2,$$

что и дает теорему Маклорена:

Теорема Маклорена. Силовые функции двух однородных софокусных эллипсоидов на внешнюю точку относятся как массы этих эллипсоидов.

---

*) $m_1=\frac{4}{3}\pi a_1b_1c_1\delta_1$ и $m_2=\frac{4}{3}\pi a_2b_2c_2\delta_2$ суть массы эллипсоидов.

3. Теперь нетрудно получить выражение для силовой функции однородного эллипсоида E с полуосями a, b, c и с плотностью δ, когда точка P единичной массы находится вне эллипсоида E, т. е. когда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>1.$$

В самом деле, проведем через точку P эллипсоид E', софокусный эллипсоиду E. Полуоси эллипсоида E' определятся, как известно, формулами

$$a'^2=a^2+\lambda, \quad b'^2=b^2+\lambda, \quad c'^2=c^2+\lambda,$$

где λ есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{3.35}$$

и есть некоторая функция от x, y, z.

Представим себе, что эллипсоид E' заполнен притягивающей материей с плотностью δ. Так как точка P лежит на поверхности E', то ее можно рассматривать с одинаковым правом и как внешнюю и как внутреннюю точку для E'. Рассматривая точку P как внешнюю для E', мы можем применить теорему Маклорена и написать

$$U(P):U'(P)=m:m',$$

где $U'(P)$ обозначает силовую функцию эллипсоида E', а m' — массу этого эллипсоида.

Рассматривая теперь точку P как внутреннюю для эллипсоида E', мы можем определить $U'(P)$ по формуле (3.33), что дает

$$U'(P)=f\delta\pi a'b'c'\int_0^\infty\left[1-\frac{x^2}{a'^2+s'}-\frac{y^2}{b'^2+s'}-\frac{z^2}{c'^2+s'}\right]\frac{ds'}{R'(s')}.$$

Подставляя это значение для $U'(P)$ в предыдущее равенство и заменяя массы m и m' их значениями, мы найдем

$$U(P)=f\delta\pi abc\int_0^\infty\frac{\left[1-\frac{x^2}{a^2+\lambda+s'}-\frac{y^2}{b^2+\lambda+s'}-\frac{z^2}{c^2+\lambda+s'}\right]ds'}{\sqrt{(a^2+\lambda+s')(b^2+\lambda+s')(c^2+\lambda+s')}}.$$

Делая здесь подстановку $s=\lambda+s'$, будем иметь окончательно

$$U(P)=f\delta\pi abc\int_\lambda^\infty\left[1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right]\frac{ds}{R(s)}, \tag{3.36}$$

а это есть классическое выражение силовой функции однородного эллипсоида на внешнюю точку, называемое **формулой Дирихле**.

Теперь простым дифференцированием получим составляющие силы, с которой эллипсоид притягивает внешнюю точку P:

$$\left.\begin{aligned} X(P) &= \frac{\partial U}{\partial x} = -2f\delta\pi abcx\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{(a^2+s)R(s)},\\ Y(P) &= \frac{\partial U}{\partial y} = -2f\delta\pi abcy\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{(b^2+s)R(s)},\\ Z(P) &= \frac{\partial U}{\partial z} = -2f\delta\pi abcz\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{(c^2+s)R(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

Полагая еще, по аналогии с формулами (3.31) и (3.32),

$$U_0(\lambda) = \pi abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{R(s)},$$

$$U_1(\lambda) = -\pi abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{(a^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{U_0(\lambda)}{a}\right],$$

$$U_2(\lambda) = -\pi abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{(b^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{U_0(\lambda)}{b}\right],$$

$$U_3(\lambda) = -\pi abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{(c^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{U_0(\lambda)}{c}\right],$$

где дифференцирования выполняются при условии, что величина λ считается постоянной, мы представим формулы (3.36) и (3.37) еще в следующем виде:

$$U(P) = f\delta\left[U_0(\lambda) + U_1(\lambda)x^2 + U_2(\lambda)y^2 + U_3(\lambda)z^2\right] \tag{3.36'}$$

и

$$\left.\begin{aligned} X(P) &= 2f\delta xU_1(\lambda),\\ Y(P) &= 2f\delta yU_2(\lambda),\\ Z(P) &= 2f\delta zU_3(\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{3.37'}$$

Нетрудно заметить, что если положить в приведенных выше формулах $\lambda=0$, то получатся формулы предыдущего параграфа, относящиеся к случаю внутренней точки.