ГЛАВА IV

СФЕРИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Общие замечания

Формулы, полученные в предыдущей главе, дают нам выражение для силовой функции эллипсоидального тела (полного эллипсоида или эллипсоидального слоя, однородного или обладающего эллипсоидальной структурой) и материальной частицы единичной массы, отнесенной к декартовой системе координат, совпадающей с главными осями эллипсоида. Если в этих формулах заменить f на $f\mu$, то мы получим выражение силовой функции тела на материальную точку массы μ.

Те же формулы дают выражение взаимной силовой функции эллипсоидального тела и шара, обладающего сферической структурой, центр которого находится в точке P, масса которого есть μ и который не имеет общей части с телом T.

Если же заменить в этих формулах буквы x, y, z на ξ', η', ζ', а последние заменить выражениями

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= a_{11}(x-\xi)+a_{21}(y-\eta)+a_{31}(z-\zeta), \\ \eta' &= a_{12}(x-\xi)+a_{22}(y-\eta)+a_{32}(z-\zeta), \\ \zeta' &= a_{13}(x-\xi)+a_{23}(y-\eta)+a_{33}(z-\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

в которых x, y, z обозначают опять координаты центра шара, ξ, η, ζ — координаты центра эллипсоидального тела T, а a_{ik} — направляющие косинусы главных осей эллипсоида T в произвольно выбранной декартовой системе координат, то мы получим общие формулы для взаимной силовой функции шара и эллипсоидального слоя.

Это общее выражение силовой функции будет содержать девять независимых переменных, а ее частные производные первого порядка по этим переменным дадут составляющие силы притяжения, действующей на шар и на эллипсоид, а также составляющие момента силы, действующей на тело T относительно центра эллипсоида G *).

Все эти выражения по необходимости выйдут очень сложными и громоздкими и даже в том случае, когда тело T есть эллипсоид вращения, т. е. когда силовая функция выражается через элементарные функции, ее выражение оказывается мало удобным и пользоваться им на практике обыкновенно весьма затруднительно.

Еще более сложным аналитически оказывается выражение силовой функции произвольно взятого тела и материальной точки (или шара), а также, конечно, выражение взаимной силовой функции двух тел произвольного вида и структуры, так как в самом общем случае силовая функция (и все ее частные производные!) выражается шестикратным интегралом, в котором не удается выполнить ни одно из входящих в него интегрирований.

Поэтому в общем случае и даже в разобранных простейших примерах приходится прибегать к какому-либо способу приближенного представления силовой функции.

Одна возможность такого приближенного представления была уже указана ранее, а именно, мы показали, что если два совершенно произвольных по форме и по структуре тела находятся весьма далеко друг от друга (по сравнению с их линейными размерами, разумеется!), то эти два тела взаимно притягиваются почти так же, как и две материальные точки, т. е. с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами инерции (или, вообще, между двумя достаточно произвольно выбранными центрами приведения).

Мы уже отмечали, что таким приближенным представлением силовой функции широко пользуются в различных областях астрономии, в частности, в небесной механике, но мы указывали также, что этим простейшим приближением далеко не всегда можно пользоваться.

В ряде важнейших задач небесной механики, например, в теории движения спутников планет, а особенно в теории движения искусственных небесных тел (искусственных спутников, космических кораблей и т. п.), оказывается необходимым более подробно рассматривать влияние формы и структуры тел на их поступательные и вращательные движения, а для этого нужно знать лучшее приближение силовой функции, чем то, которое

---

*) Момент силы притяжения, действующей на шар (однородный, или обладающий сферической структурой) относительно центра шара, всегда равен нулю.

непосредственно доставляет закон Ньютона для двух материальных точек.

Иными словами, закон притяжения Ньютона можно рассматривать как «нулевое» приближение к действительности, которое в ряде случаев оказывается достаточным, а иногда является неудовлетворительным, так как его использование не всегда может обеспечить необходимую точность. Но тогда появляется надобность рассматривать последующие приближения и нужно иметь для этого надежный математический аппарат, позволяющий легко и просто строить эти последовательные приближения и оценивать точность, которую они дают.

Таким математическим аппаратом являются бесконечные ряды того или иного вида, теория которых позволяет разложить нужную силовую функцию на сумму бесчисленного множества простых слагаемых, из которой можно затем брать столько первых членов, сколько может потребоваться в данной, конкретной задаче.

Одним из удобнейших и широко применяемых способов разложения силовой функции в бесконечный ряд является классическое разложение силовой функции тела и материальной точки (или шара, обладающего сферическим распределением плотностей) по так называемым *сферическим* или *шаровым* функциям, а поэтому прежде всего необходимо ознакомиться с элементами теории таких функций.

Эти функции, как и показывает их название, имеют отношение к сфере, и их применение объясняется приблизительно шарообразной формой планет солнечной системы, движения которых под действием их взаимных притяжений прежде всего и рассматриваются в основных задачах небесной механики.

С другой стороны, большие планеты солнечной системы, например, Земля, более близки по форме не к шарам, а к эллипсоидам (вращения или даже трехосным), а поэтому для приближенного представления силовых функций таких тел было бы более естественно использовать функции, имеющие более близкое отношение к эллипсоиду.

Такими функциями являются так называемые *эллипсоидальные* функции, введенные Ламе, и с элементами их теории также полезно ознакомиться.

Функции Ламе имеют также большое применение в теории фигур небесных тел, тесно связанной с теорией фигур равновесия вращающихся жидких или газообразных тел и их устойчивости, имеющей важное значение для теории фигуры Земли, а также для исследований в области теории фигур и эволюции звезд.

В этой главе и будут рассматриваться элементы теории упомянутых сферических и отчасти эллипсоидальных функций.