§ 2. Определение сферических функций

1. Сферические и эллипсоидальные функции появляются при изучении некоторых частных решений уравнения Лапласа, которое, как известно, в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$\nabla U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{4.2}$$

Будем искать такие частные решения этого уравнения, которые имеют вид однородного многочлена с тремя независимыми переменными x, y, z данной степени n, где n — целое положительное число ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$).

Такой многочлен будем обозначать через $U_n(x, y, z)$ и будем называть гармоническим многочленом степени n, так что

$$\nabla U_n(x, y, z) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что далеко не всякий однородный многочлен n-й степени является гармоническим многочленом. Например, многочлен 2-й степени $x^2+y^2+z^2$ (а также просто x^2, или y^2, или z^2) заведомо не удовлетворяет уравнению Лапласа, а поэтому и не может быть назван гармоническим.

Для того чтобы многочлен n-й степени был гармоническим, необходимо, как мы прежде всего покажем, чтобы его коэффициенты удовлетворяли некоторым соотношениям, так что общее число произвольных коэффициентов гармонического многочлена меньше полного числа коэффициентов общего многочлена n-й степени.

Подсчитаем сначала число различных членов в многочлене n-й степени с тремя независимыми переменными.

Для этого заметим, что однородный многочлен n-й степени с двумя независимыми переменными

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} y + \ldots + c_{n-1} x y^{n-1} + c_n y^n$$

содержит, очевидно, $n+1$ коэффициентов.

Однородный многочлен n-й степени с тремя независимыми переменными может быть записан в виде

$$c_0 z^n + u_1(x, y) \cdot z^{n-1} + \ldots + u_{n-1}(x, y) \cdot z + u_n(x, y),$$

где $u_k(x, y)$ обозначает однородный многочлен степени k с двумя переменными x и y. Следовательно, общее число различных членов и общее число коэффициентов в однородном многочлене n-й степени с тремя переменными x, y, z будет равно

$$N_n = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Теперь покажем, что в гармоническом многочлене n-й степени с тремя независимыми переменными только $2n+1$ из этих N_n коэффициентов могут быть заданы произвольно, а все остальные коэффициенты $\left(\text{в числе } \frac{n(n-1)}{2}\right)$ суть линейные комбинации этих произвольных.

Действительно, запишем многочлен n-й степени с тремя независимыми переменными в общем виде

$$U_n(x, y, z) = \sum c_n^{(m_1, m_2, m_3)} x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3}, \tag{4.3}$$

где суммирование распространяется на все целые неотрицательные числа m_1, m_2, m_3, удовлетворяющие условию

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

а $c_n^{(m_1, m_2, m_3)}$ суть N_n его коэффициентов.

Оператор Лапласа от многочлена (4.3) есть, очевидно, также однородный многочлен от x, y, z, но уже $(n-2)$-й степени, а потому он содержит всего N_{n-2} различных членов, коэффициенты которых суть линейные однородные функции от коэффициентов многочлена $U_n(x, y, z)$. Для того чтобы многочлен (4.3) был гармоническим, нужно, чтобы $\nabla U_n(x, y, z)$ был тождественно равен нулю, а для этого необходимо, чтобы все коэффициенты многочлена ∇U_n были равны нулю.

Приравнивая нулю все коэффициенты многочлена ∇U_n, мы получим систему N_{n-2} линейных однородных уравнений, связывающих N_n коэффициентов многочлена (4.3).

Если эти уравнения независимы, то из них можно определить ровно N_{n-2} коэффициентов в функции всех остальных $N_n - N_{n-2}$, остающихся произвольными. Но

$$N_n - N_{n-2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1,$$

а поэтому число произвольных коэффициентов гармонического многочлена $U_n(x, y, z)$ действительно равно $2n+1$.

В приведенном, весьма простом рассуждении остается, однако, не ясным, будут ли упомянутые линейные уравнения действительно независимыми, а поэтому мы дадим еще другое доказательство высказанного важного предложения.

Так как всякий многочлен может быть представлен в виде многочлена Тейлора, то коэффициенты многочлена (4.3) можно определить формулами Тейлора, а именно:

$$c_n^{(m_1, m_2, m_3)} = \frac{1}{m_1!\, m_2!\, m_3!} \left[\frac{\partial^n U_n(x, y, z)}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_2}\, \partial z^{m_3}} \right]_{x=y=z=0} \tag{4.3'}$$

Переписывая теперь уравнение Лапласа в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

мы можем в выражениях коэффициентов (4.3′) исключить все дифференцирования по z выше первого порядка.

Действительно, мы имеем с помощью уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^n U_n}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}} = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3-2}}\left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2}\right) =$$
$$= -\frac{\partial^n U_n}{\partial x^{m_1+2}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3-2}} - \frac{\partial^n U_n}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2+2}\partial z^{m_3-2}}.$$

В каждой из двух последних производных число дифференцирований по z уменьшилось на две единицы, а число дифференцирований по x или по y соответственно увеличилось. Отсюда ясно, что, повторяя такую операцию достаточное число раз, мы либо вовсе исключим дифференцирования по z (если m_3 четное), либо сведем число этих дифференцирований к единице (если m_3 нечетное). Таким образом, произвольными останутся лишь те коэффициенты $c_n^{(m_1, m_2, m_3)}$, для вычисления которых или вовсе не нужно дифференцировать по z, или нужно произвести это дифференцирование только один раз. Следовательно, произвольными останутся коэффициенты:

$$c_n^{(m_1, m_2, 0)} \qquad (m_1 + m_2 = n),$$

число которых равно $n+1$, и

$$c_n^{(m_1, m_2, 1)} \qquad (m_1 + m_2 = n - 1),$$

число которых равно n, а общее число тех и других как раз равно $2n+1$, что мы и хотели показать.

Это рассуждение показывает одновременно, что упомянутые выше линейные уравнения, связывающие коэффициенты гармонического многочлена $U_n(x, y, z)$, действительно оказываются независимыми.

Для иллюстрации рассмотрим некоторые частные значения n. Если $n=0$, то имеем

$$N_0 = 1, \quad 2n+1 = 1,$$

т. е. единственный гармонический многочлен нулевой степени есть

$$U_0(x, y, z) = C_0,$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Для $n=1$ имеем

$$N_1 = 3, \quad 2n+1 = 3,$$

и общий вид гармонических многочленов первой степени будет

$$U_1(x,\ y,\ z) = C_1^{(1)}x + C_1^{(2)}y + C_1^{(3)}z,$$

с тремя произвольными постоянными. Иначе говоря, всякий однородный многочлен первой степени с тремя независимыми переменными оказывается гармоническим.

Пусть $n=2$, тогда

$$N_2=6, \qquad 2n+1=5,$$

т. е. в гармоническом многочлене второй степени пять из шести коэффициентов можно выбрать произвольно. Действительно, легко видеть, что

$$C_2^{(2,\ 0,\ 0)} + C_2^{(0,\ 2,\ 0)} + C_2^{(0,\ 0,\ 2)} = 0,$$

т. е. два из этих коэффициентов можно выбрать произвольно. Так как остальные три коэффициента не входят в выражение для ∇U_2, то они также остаются произвольными и общее число произвольных коэффициентов в этом случае равно пяти.

Общий гармонический многочлен второй степени можно представить (слегка меняя обозначения коэффициентов) в виде

$$U_2(x,\ y,\ z) = C_2^{(1)}(x^2-z^2) + C_2^{(2)}(y^2-z^2) + C_2^{(3)}xy + C_2^{(4)}yz + C_2^{(5)}zx,$$

где $C_2^{(s)}$ — независимые произвольные постоянные.

Вообще, выбирая какие-нибудь $2n+1$ из N_n коэффициентов однородного гармонического многочлена n-й степени и выражая остальные коэффициенты линейным образом через эти выбранные, мы можем (путем надлежащей сортировки и перестановки членов) представить всякий общий гармонический многочлен n-й степени в следующем виде:

$$U_n(x,\ y,\ z) = \sum_{s=1}^{2n+1} C_n^{(s)} U_n^{(s)}(x,\ y,\ z), \tag{4.4}$$

где $C_n^{(s)}$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1)$ суть независимые произвольные постоянные, а $U_n^{(s)}(x,\ y,\ z)$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1)$ суть некоторые специально выбранные гармонические многочлены n-й степени, которые линейно между собой независимы.

Эти гармонические многочлены называются **основными** или **элементарными** и их можно выбирать различным образом, лишь бы они были линейно независимыми.

Итак, всякий гармонический многочлен n-й степени можно представить в виде линейной комбинации (с постоянными произвольными коэффициентами) $2n+1$ элементарных гармонических многочленов той же степени.

2. Чтобы получить явные выражения для основных (или элементарных) гармонических многочленов данной степени n, перейдем сначала к полярным сферическим координатам, полагая

$$x = r\sin\theta\cos\lambda, \quad y = r\sin\theta\sin\lambda, \quad z = r\cos\theta. \tag{4.5}$$

Тогда всякий однородный многочлен n-й степени представится в виде

$$U_n = r^n Y_n(\theta, \lambda), \tag{4.6}$$

где

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m_1+m_2+m_3=n} c_n^{(m_1, m_2, m_3)} \sin^{m_1+m_2}\theta\cos^{m_3}\theta\cos^{m_1}\lambda\sin^{m_2}\lambda. \tag{4.7}$$

Если U_n есть гармонический многочлен, то выражение (4.6) называется обычно объемной сферической функцией, а множитель $Y_n(\theta, \lambda)$, определяемый формулой (4.7) и зависящий от двух сферических координат θ и λ, называется поверхностной сферической функцией или просто сферической функцией n-го порядка.

Эти функции $Y_n(\theta, \lambda)$ называются также в некоторых руководствах «игреками Лапласа».

Как показывает формула (4.7), сферическая функция n-го порядка есть многочлен относительно синусов и косинусов углов θ и λ, каждый член которого есть произведение функции одного только θ на функцию только от λ.

Каждому элементарному гармоническому многочлену также соответствует по формуле (4.6) некоторая сферическая функция, которую тоже будем называть элементарной. Следовательно, всякая общая сферическая функция является линейной комбинацией $2n+1$ элементарных сферических функций, обладающих указанной выше структурой. Мы еще более уточним эту структуру, рассматривая отдельно множители каждого члена формулы (4.7). А именно, множитель, содержащий только угол θ, мы будем рассматривать преимущественно как функцию от $\cos\theta$, полагая

$$\nu = \cos\theta,$$

так что

$$\sin^{m_1+m_2}\theta\cos^{m_3}\theta = (1-\nu^2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}\nu^{m_3}$$

— это многочлен n-й степени относительно ν, если m_1+m_2 есть число четное и представляет собой произведение многочлена $(n-1)$-й степени на $\sqrt{1-\nu^2}$, если m_1+m_2 есть число нечетное.

Другой множитель, содержащий только угол λ, мы будем представлять в виде тригонометрического многочлена относительно синусов и косинусов целых кратностей λ. Этот многочлен будет содержать только косинусы, если m_2 есть число четное, и только синусы, если m_2 — нечетное, а наибольшая кратность угла λ под знаками синусов и косинусов будет, очевидно, равна $m_1+m_2\leqslant n$ *). Поэтому число членов с косинусами различных кратностей угла λ будет равно $n+1$, а число членов с синусами будет равно n. Таким образом, число различных тригонометрических одночленов, каждый из которых содержит либо только косинус либо только синус целой кратности λ, будет, очевидно, равно как раз $2n+1$, т. е. полному числу элементарных сферических функций n-го порядка. Так как выбор элементарных гармонических многочленов, а следовательно, и элементарных сферических функций, вполне произволен, то мы можем распорядиться этим выбором так, чтобы каждая элементарная сферическая функция n-го порядка представляла собой произведение некоторой функции от ν на косинус или на синус угла $k\lambda$ ($k=0$, 1, 2, ..., n).

Обозначая, как принято, упомянутые выше функции от ν через $P_n^{(k)}(\nu)$, мы можем выписать следующий полный набор элементарных сферических функций n-го порядка **):

$$\left.\begin{array}{llll} P_n^{(0)}(\nu), & P_n^{(1)}(\nu)\cos\lambda, & P_n^{(2)}(\nu)\cos 2\lambda, \;\ldots, & P_n^{(n)}(\nu)\cos n\lambda, \\ & P_n^{(1)}(\nu)\sin\lambda, & P_n^{(2)}(\nu)\sin 2\lambda, \;\ldots, & P_n^{(n)}(\nu)\sin n\lambda. \end{array}\right\} \qquad (4.8)$$

Из сказанного выше следует, что функция $P_n^{(k)}(\nu)$ есть многочлен n-й степени либо многочлен $(n-1)$-й степени, умноженный на $\sqrt{1-\nu^2}$.

Всякая другая сферическая функция того же порядка n будет линейной комбинацией с постоянными коэффициентами элементарных функций (4.8). Поэтому общая сферическая функция n-го порядка представится следующей основной формулой:

$$Y_n(\theta,\lambda)=\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\nu)\,[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda], \qquad (4.9)$$

где A_{nk} и B_{nk} суть $2n+1$ произвольных постоянных (для каждого n).

§ 3. Дифференциальные уравнения для сферических функций

1. Установить вид и структуру элементарных сферических функций непосредственно довольно затруднительно. Гораздо проще это сделать, рассматривая дифференциальные уравнения,

*) См. разложения степеней синуса и косинуса по таким же функциям кратных дуг, например, в справочнике: И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», Физматгиз, 1963.

**) Вместо $P_n^{(k)}(\nu)$ эти функции часто обозначаются также через $X_n^{(k)}(\nu)$, а за угол θ берут иногда не дополнение до широты, а саму широту.