только синусы, если m_2 — нечетное, а наибольшая кратность угла λ под знаками синусов и косинусов будет, очевидно, равна $m_1+m_2 \leqslant n$ *). Поэтому число членов с косинусами различных кратностей угла λ будет равно $n+1$, а число членов с синусами будет равно n. Таким образом, число различных тригонометрических одночленов, каждый из которых содержит либо только косинус либо только синус целой кратности λ, будет, очевидно, равно как раз $2n+1$, т. е. полному числу элементарных сферических функций n-го порядка. Так как выбор элементарных гармонических многочленов, а следовательно, и элементарных сферических функций, вполне произволен, то мы можем распорядиться этим выбором так, чтобы каждая элементарная сферическая функция n-го порядка представляла собой произведение некоторой функции от ν на косинус или на синус угла $k\lambda$ ($k=0$, 1, 2, ..., n).

Обозначая, как принято, упомянутые выше функции от ν через $P_n^{(k)}(\nu)$, мы можем выписать следующий полный набор элементарных сферических функций n-го порядка **):

$$\left.\begin{array}{llll} P_n^{(0)}(\nu), & P_n^{(1)}(\nu)\cos\lambda, & P_n^{(2)}(\nu)\cos 2\lambda, \;\ldots, & P_n^{(n)}(\nu)\cos n\lambda, \\ & P_n^{(1)}(\nu)\sin\lambda, & P_n^{(2)}(\nu)\sin 2\lambda, \;\ldots, & P_n^{(n)}(\nu)\sin n\lambda. \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

Из сказанного выше следует, что функция $P_n^{(k)}(\nu)$ есть многочлен n-й степени либо многочлен $(n-1)$-й степени, умноженный на $\sqrt{1-\nu^2}$.

Всякая другая сферическая функция того же порядка n будет линейной комбинацией с постоянными коэффициентами элементарных функций (4.8). Поэтому общая сферическая функция n-го порядка представится следующей основной формулой:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\nu)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda], \tag{4.9}$$

где A_{nk} и B_{nk} суть $2n+1$ произвольных постоянных (для каждого n).

§ 3. Дифференциальные уравнения для сферических функций

1. Установить вид и структуру элементарных сферических функций непосредственно довольно затруднительно. Гораздо проще это сделать, рассматривая дифференциальные уравнения,

*) См. разложения степеней синуса и косинуса по таким же функциям кратных дуг, например, в справочнике: И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», Физматгиз, 1963.

**) Вместо $P_n^{(k)}(\nu)$ эти функции часто обозначаются также через $X_n^{(k)}(\nu)$, а за угол θ берут иногда не дополнение до широты, а саму широту.

которым удовлетворяют эти функции. Чтобы вывести эти уравнения, заметим, что гармонический многочлен U_n, по определению, есть некоторое решение уравнения Лапласа (4.2). Переходя к сферическим координатам (4.5), мы представили этот многочлен в виде (4.6), а поэтому это выражение должно удовлетворять уравнению Лапласа в полярных координатах. Беря выражение для оператора Лапласа в сферических координатах (см. (3.8) в § 1 гл. III), мы напишем требуемое уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2}=0. \tag{4.10}$$

Попробуем искать частное решение этого уравнения в виде произведения функции только от r на функцию только от θ, λ, т. е. в виде

$$U=f(r)Y(\theta, \lambda).$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4.10) дает

$$Y(\theta, \lambda)\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]+$$
$$+f(r)\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\lambda)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\lambda)}{\partial\lambda^2}\right\}=0,\right.$$

что можно переписать, разделяя переменные, следующим образом:

$$\frac{1}{f(r)}\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]=$$
$$=-\frac{1}{Y(\theta,\lambda)}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\lambda)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\lambda)}{\partial\lambda^2}\right\}.$$

Левая часть последнего равенства содержит только r, а правая только θ и λ, а поэтому каждая часть должна быть равна одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через $\varkappa$, мы получим два следующих уравнения:

$$\frac{1}{f(r)}\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]=\varkappa, \tag{4.11}$$

и

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}+\varkappa Y=0. \tag{4.12}$$

Так как U_n определяется формулой (4.6), то функция от r нам известна и мы имеем $f(r)=r^n$. Подставляя это значение в уравнение (4.11), мы найдем, что

$$\varkappa=n(n+1).$$

Заменяя теперь постоянную $\varkappa$ в уравнении (4.12) найденным ее значением, мы получим уравнение, которому должна удовлетворять всякая сферическая функция n-го порядка:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2}+n(n+1)Y_n=0. \tag{4.13}$$

Так как, далее, общая сферическая функция n-го порядка есть линейная комбинация одночленов, каждый из которых есть произведение функции только от θ на функцию только от λ, то частное решение уравнения (4.13) будем искать в виде

$$\Theta_n(\theta)\cdot L_n(\lambda), \tag{4.13'}$$

а затем образуем сумму найденных частных решений, которая в силу линейности уравнения (4.13) также будет его решением.

Заменяя в (4.13) Y_n на $\Theta_n L_n$, получим

$$\frac{L_n}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+\frac{\Theta_n}{\sin^2\theta}\frac{d^2L_n}{d\lambda^2}+n(n+1)\Theta_n L_n=0,$$

откуда, разделяя переменные, имеем

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_n}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+n(n+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{L_n}\frac{d^2L_n}{d\lambda^2}.$$

Отсюда следует, что каждая часть равенства должна быть равна одной и той же постоянной, которую обозначим через l. Таким образом, получим следующие уравнения для определения каждого из множителей частного решения (4.13):

$$\frac{d^2L_n}{d\lambda^2}=-l\cdot L_n, \tag{4.14}$$

и

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+\left[n(n+1)\sin^2\theta-l\right]\Theta_n=0. \tag{4.15}$$

Так как множитель, зависящий только от λ, должен быть линейной комбинацией синуса и косинуса целой кратности λ, то постоянная l должна быть квадратом целого числа.

Полагая $l=k^2$, мы будем иметь частные решения уравнения (4.14) в виде

$$\cos k\lambda, \qquad \sin k\lambda.$$

Заменяя теперь в уравнении (4.15) l на k^2, сделаем подстановку

$$\nu=\cos\theta,$$

что даст следующее уравнение:

$$\frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dP}{d\nu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{1-\nu^2}\right]P=0, \tag{4.16}$$

в котором неизвестная функция обозначена через P.

Это уравнение, являющееся обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка без правой части (однородное!), называется уравнением Лежандра и играет важную роль, так как служит аналитической основой для изучения сферических функций.

2. Покажем, что это уравнение имеет частное решение в виде многочлена n-й степени или в виде произведения многочлена $(n-1)$-й степени на $\sqrt{1-v^2}$.

Для этого рассмотрим предварительно вспомогательную функцию

$$y=(x^2-1)^p, \tag{4.17}$$

где p — целое положительное число. Беря логарифмические производные от обеих частей равенства (4.17), мы имеем

$$\frac{y'}{y}=\frac{2px}{x^2-1},$$

откуда следует, что вспомогательная функция y удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2pxy=0.$$

Продифференцируем это равенство $m+1$ раз (m — целое положительное число), для чего применим известную формулу Лейбница для вычисления высших производных от произведения двух функций:

$$\frac{d^n(u\cdot v)}{dx^n}=\sum_{s=0}^{n}C_n^s\,\frac{d^{n-s}u}{dx^{n-s}}\,\frac{d^s v}{dx^s}, \tag{4.18}$$

где

$$C_n^s=\frac{n!}{(n-s)!\,s!}$$

суть биномиальные коэффициенты.

Нетрудно проверить, что результат дифференцирования запишется в виде

$$(1-x^2)\frac{d^{m+}\,y}{dx^{m+2}}-(2m-2p+2)\,x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+(2p-m)(m+1)\frac{d^m y}{dx^m}=0.$$

Отсюда видно, что функция

$$z=\frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m}\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p) \tag{4.19}$$

удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-(2m-2p+2)\,x\frac{dz}{dx}+(2p-m)(m+1)\,z=0. \tag{4.20}$$

Вернемся теперь к уравнению (4.16), которое перепишем, обозначая независимую переменную через x и искомую функцию через z, в виде

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{1-x^2}\right]z=0. \quad (4.16')$$

Рассмотрим сначала случай $k=0$. Тогда это уравнение примет вид

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+n(n+1)z=0 \quad (4.21)$$

и совпадает с уравнением (4.20) при $p=m=n$.

Отсюда непосредственно следует, что уравнение (4.21) имеет частное решение вида

$$z=C\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad (4.22)$$

где C — какая угодно постоянная. Беря

$$C=\frac{1}{2^n\cdot n!}$$

и возвращаясь к уравнению (4.16), мы видим, что в случае $k=0$ это уравнение имеет частное решение

$$P_n(\nu)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n}. \quad (4.23)$$

Нетрудно убедиться, что функция $P_n(\nu)$ есть многочлен n-й степени, содержащий только четные степени ν, если n есть число четное, и только нечетные степени ν, если n — нечетное.

Многочлен $P_n(\nu)$ называется многочленом Лежандра (или полиномом Лежандра), а формула (4.23), определяющая эти многочлены, называется формулой Родрига.

Формула Родрига может также служить для непосредственного вычисления многочленов Лежандра, так как для этого требуется производить только операции дифференцирования, весьма несложные, по крайней мере при не очень больших значениях n.

Действительно, полагая $n=0, 1, 2, 3$, без труда находим

$$P_0(\nu)=1,$$
$$P_1(\nu)=\nu,$$
$$P_2(\nu)=\frac{3}{2}\nu^2-\frac{1}{2},$$
$$P_3(\nu)=\frac{5}{2}\nu^3-\frac{3}{2}\nu.$$

Для бóльших значений n многочлены Лежандра проще вычисляются несколько иным методом, как будет показано в следующем параграфе.

3. Перейдем к рассмотрению случая $k \neq 0$. Преобразуя уравнение (4.16′) подстановкой

$$z = (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \zeta, \tag{4.24}$$

мы получим следующее уравнение:

$$(1 - x^2)\frac{d^2\zeta}{dx^2} - 2(k+1)x\frac{d\zeta}{dx} + [n(n+1) - k(k+1)]\zeta = 0, \tag{4.25}$$

которое совпадает, как нетрудно проверить, с уравнением (4.20) при $p = n$ и $m = n + k$. Поэтому уравнение (4.25) заведомо имеет частное решение вида

$$\zeta = C\,\frac{d^{n+k}(x^2-1)^n}{dx^{n+k}},$$

а следовательно, уравнение (4.16′) имеет частное решение вида

$$z = C(1 - x^2)^{\frac{k}{2}}\,\frac{d^{n+k}(x^2-1)^n}{dx^{n+k}}.$$

Если выбрать постоянную C так же, как и в формуле (4.22), и возвратиться к обозначениям уравнения (4.16), то мы получим следующее частное его решение:

$$P_n^{(k)}(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{k}{2}}\,\frac{d^k P_n(\nu)}{d\nu^k}, \tag{4.26}$$

причем эта функция есть действительно или многочлен (когда k есть число четное) степени n или (когда k — нечетное) многочлен $(n-1)$-й степени, помноженный на $\sqrt{1-\nu^2}$.

Величины $P_n^{(k)}(\nu)$, определяемые формулой (4.26), называются **присоединенными функциями Лежандра** (или ассоциированными функциями Лежандра) и вычисляются без всяких затруднений.

Выпишем для примера присоединенные функции для $n=2$ $(k=1, 2)$ и для $n=3$ $(k=1, 2, 3)$. Мы имеем

$$P_2^{(1)}(\nu) = (1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{dP_2(\nu)}{d\nu} = 3\nu\sqrt{1-\nu^2},$$

$$P_2^{(2)}(\nu) = (1-\nu^2)\,\frac{d^2P_2(\nu)}{d\nu^2} = 3(1-\nu^2),$$

$$P_3^{(1)}(\nu) = (1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{dP_3(\nu)}{d\nu} = \left(\frac{15}{2}\nu^2 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-\nu^2},$$

$$P_3^{(2)}(\nu) = (1-\nu^2)\,\frac{d^2P_3(\nu)}{d\nu^2} = 15\nu(1-\nu^2),$$

$$P_3^{(3)}(\nu) = (1-\nu^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{d^3P_3(\nu)}{d\nu^3} = 15(1-\nu^2)\sqrt{1-\nu^2}.$$

Примечание. Многочлен Лежандра есть частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (4.21). Из теории линейных уравнений известно, что, зная одно частное решение однородного уравнения второго порядка, можно найти при помощи квадратур второе его решение, линейно независимое с первым. Нетрудно проверить, что это второе решение можно представить в виде

$$Q_n(x) = P_n(x) \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{(1-x^2)\,P_n^2(x)}, \tag{4.27}$$

а тогда общее решение уравнения Лежандра (4.21) будет иметь вид

$$z = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x),$$

где C_1 и C_2 — две необходимые произвольные постоянные.

Функции $Q_n(x)$, называемые *функциями Лежандра второго рода*, уже не являются многочленами и суть некоторые трансцендентные функции. Вычисляя первые из этих функций непосредственно по формуле (4.27), мы имеем

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln \frac{x+1}{x-1} - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 1) \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2} x.$$

Также и присоединенная функция Лежандра $P_n^{(k)}(x)$ есть частное решение уравнения (4.16′), а поэтому второе, линейно независимое частное решение этого уравнения также найдется при помощи квадратур. Это второе частное решение определится формулой, аналогичной формуле (4.27)

$$Q_n^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{(1-x^2)\left[P_n^{(k)}(x)\right]^2}, \tag{4.27′}$$

а общее решение уравнения (4.16) напишется в виде

$$z = C_1 P_n^{(k)}(x) + C_2 Q_n^{(k)}(x).$$

Функции $Q_n^{(k)}(x)$, определяемые формулой (4.27′), называются *присоединенными функциями Лежандра второго рода* и также суть функции трансцендентные.