## § 4. Свойства многочленов Лежандра

1. Как установлено в предыдущем параграфе, все элементарные сферические функции $n$-го порядка представляют собой произведения присоединенных функций Лежандра на косинусы или на синусы целых кратностей полярного угла $\lambda$. С другой стороны, присоединенные функции $P_n^{(k)}(\nu)$ выражаются через многочлены Лежандра, а поэтому основными элементарными сферическими функциями являются именно эти последние.

Рассмотрим в этом параграфе некоторые свойства многочленов Лежандра и некоторые дополнительные формулы для их представления и вычисления.

Заметим прежде всего, что из формулы Родрига (4.23) нетрудно получить развернутое выражение для многочлена Лежандра, позволяющее вычислить любой из этих многочленов, независимо от всех предыдущих. Действительно, по формуле бинома Ньютона

$$(\nu^2-1)^n=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s C_n^s \nu^{2n-2s}. \tag{4.28}$$

Дифференцируя это равенство $n$ раз по $\nu$ и имея в виду, что при $2s>n$ $n$-я производная от $\nu^{2n-2s}$ есть нуль, мы найдем

$$\frac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n}=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^s C_n^s(2n-2s)(2n-2s-1)\ldots$$
$$\ldots[2n-2s-(n-1)]\,\nu^{n-2s},$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ обозначает наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{n}{2}$.

Теперь формула (4.23) дает

$$P_n(\nu)=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}\nu^{n-2s}, \tag{4.29}$$

где $P_{ns}$ — постоянные коэффициенты, определяемые следующей формулой:

$$P_{ns}=(-1)^s\frac{(2n-2s)}{2^n\cdot s!\,(n-s)!\,(n-2s)!}. \tag{4.30}$$

По формуле (4.30) найдем, например,

$$P_4(\nu)=\frac{1}{8}(35\nu^4-30\nu^2+3),$$

$$P_5(\nu)=\frac{1}{8}(63\nu^5-70\nu^3+15\nu).$$

Покажем теперь, что многочлены Лежандра являются коэффициентами разложения некоторой функции в ряд Тейлора, а именно покажем, что справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x). \tag{4.31}$$

Функция

$$\Phi(\alpha, x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.31'}$$

называется по этой причине **производящей функцией многочленов Лежандра**.

Для вывода формулы (4.31) воспользуемся известной формулой Лагранжа, дающей разложение по степеням $\alpha$ корня (или некоторой функции от корня) $\zeta$ уравнения Лагранжа

$$F(z)=z-x-\alpha f(z)=0, \tag{4.32}$$

обращающегося в $x$ при $\alpha=0$.

В уравнении (4.32) $f(z)$ есть заданная функция комплексного переменного $z$, голоморфная в круге $C$ с центром в точке $x$ и такая, что на окружности имеем

$$|\alpha f(z)|<|z-x|.$$

Если $\Pi(z)$ есть заданная функция, голоморфная в круге $C$, то упомянутая формула Лагранжа может быть написана в следующем виде *):

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[\Pi(x)f^n(x)]. \tag{4.33}$$

В теории аналитических функций показывается, что если $f(z)$ есть целая функция или многочлен, то ряд (4.33) сходится абсолютно при значениях $\alpha$, удовлетворяющих неравенству

$$|\alpha|<\bar{\alpha},$$

где $\bar{\alpha}$ есть максимум функции

$$R(r)=\frac{r}{M(r)},$$

а $M(r)$ есть некоторый высший предел значений модуля функции $f(z)$ вдоль окружности радиуса $r$, с центром в точке $x$.

---

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 2, перев. с франц., ГТТИ, 1933. Другие способы вывода производящей функции см. в книге Л. Н. Сретенского, Теория ньютоновского потенциала, или в книге Н. П. Грушинского, Теория фигуры Земли.

Чтобы получить теперь нужную нам формулу (4.31), положим в (4.32) и (4.33)

$$f(z)=\frac{z^2-1}{2}.$$

Тогда уравнение Лагранжа превращается в простое квадратное уравнение относительно $z$, и тот его корень, который стремится к $x$ при $\alpha \to 0$, определяется формулой

$$\zeta=\frac{1-\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}{\alpha}.$$

Возьмем в формуле (4.33) $\Pi(z)=1$. Так как в нашем случае

$$F'(\zeta)=1-\alpha\zeta=\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2},$$

то формула (4.33) дает

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!\,2^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

что в виду формулы Родрига (4.23) приводит нас к искомому разложению (4.31).

Найдем теперь число $\bar{\alpha}$, т. е. область тех значений переменной $\alpha$, при которых ряд (4.31) сходится абсолютно.

Для этого нужно определить сначала высший предел значений модуля функции $f(z)$ на окружности $C$ радиуса $r$ с центром в точке $x$, а затем найти максимум функции $R(r)$, когда $r$ изменяется от нуля до бесконечности.

Так как в нашем случае $x$ есть косинус некоторого угла, то $-1 \leqslant x \leqslant +1$ и точка $x$ лежит на действительной оси. Обозначая через $\varphi$ угол между произвольным радиусом окружности $C$ и положительным направлением оси абсцисс, мы будем иметь на $C$

$$z=x+r\cos\varphi+ir\sin\varphi,$$

$$\bar{z}=x+r\cos\varphi-ir\sin\varphi,$$

где $\bar{z}$ обозначает число, сопряженное с $z$.

Далее можем написать

$$4\,|f(z)|^2=(1-z^2)(1-\bar{z}^2),$$

и, следовательно, модуль функции $f(z)$ на окружности $C$ определится формулой

$$4\,|f(z)|^2=[1+r^2\sin^2\varphi-(x+r\cos\varphi)^2]^2+4r^2\sin^2\varphi\,(x+r\cos\varphi)^2.$$

При $\varphi=\frac{\pi}{2}$ это выражение имеет наибольшее значение, так что

$$4M^2(r)=(1+r^2-x^2)^2+4x^2r^2.$$

Чтобы найти теперь максимум функции $R(r)$, мы должны решить уравнение $R'(r)=0$, т. е. уравнение

$$M(r)-rM'(r)=0,$$

которое приводится к виду

$$(1+r^2-x^2)(1-r^2-x^2)=0.$$

Это уравнение имеет единственный вещественный корень $r_0=\sqrt{1-x^2}$, который, как нетрудно проверить, действительно соответствует максимуму функции $R(r)$.

Теперь находим

$$\bar{\alpha}=\max R(r)=\frac{r_0}{M(r_0)}=1,$$

и ряд (4.31) сходится абсолютно при условии, что $|x|\leqslant 1$, если

$$|\alpha|<1.$$

Полученный результат можно еще проверить следующим образом. Если $|x|\leqslant 1$, то квадратный трехчлен

$$\alpha^2-2x\alpha+1$$

имеет корни

$$x\pm i\sqrt{1-x^2},$$

и модуль каждого из них равен единице. Поэтому особые точки ветвления производящей функции многочленов Лежандра, рассматриваемой как функция от $\alpha$, лежат на окружности единичного радиуса с центром в точке $\alpha=0$, а поэтому ряд (4.31) действительно сходится абсолютно только при $|\alpha|<1$.

**2.** Применим теперь производящую функцию для получения некоторых числовых значений многочленов Лежандра и для вывода некоторых их свойств.

Положим в формуле (4.31) $x=+1$, что дает

$$\frac{1}{1-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(+1),$$

откуда немедленно выводим

$$P_n(+1)=+1. \tag{4.34}$$

Полагая, далее, $x=-1$, имеем

$$\frac{1}{1+\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(-1),$$

откуда получаем

$$P_n(-1)=(-1)^n. \tag{4.35}$$

Наконец, полагая $x=0$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\alpha^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(0),$$

откуда находим *)

$$P_{2n-1}(0)=0,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{4.36}$$

Последние формулы легко также вывести непосредственно из формулы (4.29), дающей развернутое выражение для $P_n(x)$.

Перейдем к выводу некоторых рекуррентных соотношений между многочленами Лежандра.

Так как равенство (4.31) есть тождество, то мы можем дифференцировать его и по $\alpha$ и по $x$, в результате чего опять получим тождества.

Дифференцируя (4.31) по $\alpha$, получим следующее тождество:

$$(x-\alpha)(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^{n-1}P_n(x),$$

которое можно написать также следующим образом:

$$(x-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^{n-1}P_n(x).$$

Приравнивая коэффициенты при $\alpha^n$ в левой и правой частях этого равенства, мы найдем

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0. \tag{4.37}$$

Это соотношение, связывающее три последовательных многочлена Лежандра, позволяет легко вычислить $P_{n+1}$, зная $P_{n-1}$ и $P_n$. Так как мы уже знаем $P_4$ и $P_5$, то по формуле (4.37) найдем, например,

$$P_6(x)=\frac{11}{6}xP_5(x)-\frac{5}{6}P_4(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5),$$

$$P_7(x)=\frac{13}{7}xP_6(x)-\frac{6}{7}P_5(x)=\frac{1}{16}\left(429x^7-693x^5+315x^3-35x\right).$$

Этот процесс вычисления многочленов Лежандра можно продолжать, разумеется, сколь угодно далеко.

*) Символ $n!!$ обозначает произведение всех последовательных целых чисел, одинаковой четности с $n$, не больше $n$. Например, $10!!=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10$, $13!!=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13$.

Дифференцируя теперь (4.31) по $x$, имеем

$$\alpha(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P'_n(x),$$

или

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P'_n(x).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при $\alpha^{n+1}$ в левой и правой частях равенства, получаем

$$P_n(x)=P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x). \tag{4.38}$$

Это есть второе рекуррентное соотиошение между многочленами Лежандра.

Дифференцируя затем (4.37) по $x$, найдем

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2n+1)\left[P_n(x)+xP'_n(x)\right]+nP'_{n-1}(x)=0. \tag{4.39}$$

Исключая теперь из соотношений (4.38) и (4.39) производную $P'_n(x)$, найдем третье рекуррентное соотношение

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x). \tag{4.40}$$

Придавая в этом равенстве значку $n$ все целые значения от 1 до $m$ и складывая полученные равенства, мы получим еще следующее соотношение:

$$\sum_{n=0}^{m}(2n+1)P_n(x)=P'_{m+1}(x)+P'_m(x). \tag{4.41}$$

Если же исключим из (4.38) и (4.39) производную $P'_{n-1}(x)$, то найдем четвертое рекуррентное соотношение:

$$P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x). \tag{4.42}$$

**3.** Теперь займемся получением некоторых оценок для числовых значений многочленов Лежандра.

Для этого выведем сначала формулу, принадлежащую Лапласу, представляющую многочлен Лежандра $n$-го порядка в виде некоторого определенного интеграла.

Замечая, что (4.31) дает разложение функции $\Phi(\alpha, x)$ в ряд Тейлора по степеням $\alpha$, абсолютно сходящееся внутри круга единичного радиуса с центром в точке $\alpha=0$, мы имеем по интегральным формулам Тейлора

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\Phi(\alpha, x)\,d\alpha}{\alpha^{n+1}},$$

или

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}}, \tag{4.43}$$

где интегралы берутся по окружности упомянутого круга.

Делая в интеграле (4.43) подстановку

$$\frac{1}{\alpha} = x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi,$$

мы имеем

$$\frac{d\alpha}{\alpha^2} = i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\, d\varphi, \quad \sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2} = \alpha\sqrt{1-x^2}\sin\varphi,$$

и, следовательно,

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi. \tag{4.44}$$

Формула (4.44) называется **формулой Лапласа** и может служить также для фактического вычисления многочленов Лежандра, причем мнимость, входящая под знаком интеграла, сама собой исчезает.

Действительно, разлагая подынтегральную функцию по формуле бинома Ньютона, мы имеем

$$\left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k i^k (1-x^2)^{\frac{k}{2}} x^{n-k} \cos^k\varphi.$$

Следовательно, по формуле (4.44)

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k i^k (1-x^2)^{\frac{k}{2}} x^{n-k} \int\limits_0^\pi \cos^k\varphi\, d\varphi.$$

Но входящий сюда интеграл равен нулю, когда $k$ нечетное, а при $k$ четном имеем *)

$$\int\limits_0^\pi \cos^{2k}\varphi\, d\varphi = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi.$$

Таким образом, окончательно

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_n^{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (1-x^2)^k x^{n-2k}. \tag{4.45}$$

*) См., например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

что есть действительное выражение, могущее служить также и для непосредственного вычисления многочленов Лежандра. Например, имеем

$$P_8(x)=x^8-\frac{1}{2}C_8^2(1-x^2)x^6+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}C_8^4(1-x^2)^2x^4-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}C_8^6(1-x^2)^3x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(1-x^2)^4=$$

$$=\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35).$$

Формула Лапласа (4.44) позволяет также вывести интегральное представление для производящей функции (4.31). Действительно, мы находим

$$\Phi(\alpha, x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-\alpha(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi)}.$$

Пользуясь формулой Лапласа, мы можем получить оценки, о которых упоминалось выше. Прежде всего отметим, что при $x=\pm 1$ формула (4.44) даст

$$P_n(\pm 1)=(\pm 1)^n.$$

Покажем теперь, что при всех других значениях $x$, заключающихся в промежутке $(-1, +1)$, абсолютные значения любого многочлена Лежандра не превосходят единицы.

Действительно, из формулы Лапласа имеем неравенство

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi|^n\,d\varphi. \qquad (4.44')$$

Но при $|x|<1$ имеем, очевидно,

$$|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi|=\sqrt{x^2+(1-x^2)\cos^2\varphi}=$$

$$=\sqrt{\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi}<1,$$

вследствие чего при тех же значениях $x$ имеем из (4.44′)

$$|P_n(x)|<1. \qquad (4.46)$$

Выведем более точную оценку для многочленов Лежандра. Для этого перепишем неравенство (4.44′) в виде*)

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [1-(1-x^2)\sin^2\varphi]^{\frac{n}{2}}\,d\varphi.$$

Так как для $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geqslant \frac{2}{\pi},$$

то при $|x| < 1$ будем иметь

$$1-(1-x^2)\sin^2\varphi \leqslant 1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2(1-x^2)\,\varphi^2,$$

вследствие чего получим следующее неравенство:

$$|P_n(x)| < \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-z^2\varphi^2)^{\frac{n}{2}}\,d\varphi,$$

где положено для сокращения

$$z = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

Так как, далее

$$1-z^2\varphi^2 \leqslant e^{-z^2\varphi^2},$$

то предыдущее неравенство можно еще усилить и написать в виде

$$|P_n(x)| < \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nz^2\varphi^2}{2}}\,d\varphi,$$

или, полагая

$$t = z\varphi\sqrt{\frac{n}{2}}, \qquad T = \frac{z\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

будем иметь

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{n(1-x^2)}}\int\limits_0^T e^{-t^2}\,dt.$$

---

*) Здесь использовано определение модуля комплексного числа

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Но известно, что

$$\int_0^T e^{-t^2}\,dt < \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

а поэтому мы имеем окончательное неравенство

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-x^2)}}, \tag{4.46'}$$

показывающее, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$$

при всяком значении $x$, лежащем в открытом промежутке $(-1, +1)$.

**Примечание.** Из неравенства (4.46) следует и более сильное утверждение, а именно: во всяком промежутке

$$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon,$$

где $0<\varepsilon<1$, функция $P_n(x)$ равномерно стремится к нулю, как $1/\sqrt{n}$.

## § 5. Свойства ортогональности сферических функций

Как известно, бесконечная последовательность функций одного действительного переменного $f_n(x)$, определенных на некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, называется ортогональной последовательностью в промежутке $(a, b)$, если

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x)\,dx = 0$$

для любых двух неравных значений $n$ и $m$.

Отсюда следует, что ни одна из этих функций не может быть линейной комбинацией с постоянными коэффициентами любого числа других функций этой последовательности.

Если функции, образующие последовательность, выбраны так, что

$$\int_a^b f_n^2(x)\,dx = 1$$

для всех значений $n$ $(n=1, 2, \ldots)$, то данная ортогональная последовательность называется нормированной.

Ортогональная система функций называется полной, если не существует такой, не равной тождественно нулю функции