Но известно, что

$$\int_0^T e^{-t^2}dt < \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

а поэтому мы имеем окончательное неравенство

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-x^2)}}, \tag{4.46'}$$

показывающее, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$$

при всяком значении x, лежащем в открытом промежутке $(-1, +1)$.

Примечание. Из неравенства (4.46) следует и более сильное утверждение, а именно: во всяком промежутке

$$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon,$$

где $0<\varepsilon<1$, функция $P_n(x)$ равномерно стремится к нулю, как $1/\sqrt{n}$.

§ 5. Свойства ортогональности сферических функций

Как известно, бесконечная последовательность функций одного действительного переменного $f_n(x)$, определенных на некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, называется ортогональной последовательностью в промежутке (a, b), если

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x)\,dx = 0$$

для любых двух неравных значений n и m.

Отсюда следует, что ни одна из этих функций не может быть линейной комбинацией с постоянными коэффициентами любого числа других функций этой последовательности.

Если функции, образующие последовательность, выбраны так, что

$$\int_a^b f_n^2(x)\,dx = 1$$

для всех значений n $(n=1, 2, \ldots)$, то данная ортогональная последовательность называется нормированной.

Ортогональная система функций называется полной, если не существует такой, не равной тождественно нулю функции

$\varphi(x)$, что

$$\int_a^b \varphi(x) f_n(x)\,dx = 0$$

для всех значений n.

1. Покажем теперь, что многочлены Лежандра

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

образуют ортогональную в промежутке $(-1, +1)$ последовательность функций.

Применяя способ доказательства, принадлежащий самому Лежандру, возьмем формулу (4.31), которая дает следующие ряды:

$$\Phi(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x),$$

$$\Phi(\beta, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m P_m(x),$$

абсолютно сходящиеся для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant 1$, если $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$. Так как произведение двух абсолютно сходящихся рядов есть также ряд абсолютно сходящийся, то мы можем перемножить два предыдущих равенства, что дает

$$\Phi(\alpha, x)\Phi(\beta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m P_n(x) P_m(x).$$

Интегрируя последнее равенство по x в пределах от -1 до $+1$, мы имеем

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(\alpha, x)\Phi(\beta, x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\,dx. \tag{4.47}$$

С другой стороны, как нетрудно проверить *)

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(\alpha, x)\Phi(\beta, x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \Big[\ln \left[\sqrt{\beta(1-2\alpha x+\alpha^2)} + \sqrt{\alpha(1-2\beta x+\beta^2)} \right] \Big]_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{(1+\alpha)\sqrt{\beta} + (1+\beta)\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)\sqrt{\beta} + (1-\beta)\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

*) См. также: И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

Но известно следующее разложение:

$$\ln(1+z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{k+1}}{k+1},$$

абсолютно сходящееся при $|z|<1$, с помощью которого выводим без труда

$$\int_{-1}^{+1}\Phi(\alpha,\ x)\,\Phi(\beta,\ x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}(\alpha\beta)^n, \tag{4.48}$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно, так как $|\alpha\beta|<1$.

Сравнивая равенства (4.47) и (4.48), имеем

$$\int_{-1}^{+1}P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n), \tag{4.49}$$

и для $m=n$

$$\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}. \tag{4.50}$$

Равенство (4.49) доказывает ортогональность многочленов Лежандра в промежутке $(-1,\ +1)$, а равенство (4.50) показывает, что эта система функций не является нормированной.

Впрочем, легко видеть, что функции

$$\tilde{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x),$$

которые также являются многочленами, удовлетворяющими уравнению Лежандра, образуют нормированную ортогональную систему в промежутке $(-1,\ +1)$. Однако в дальнейшем мы будем пользоваться именно многочленами Лежандра, т. е. ненормированной ортогональной системой функций в промежутке $(-1,\ +1)$.

2. Перейдем к рассмотрению свойства ортогональности присоединенных функций Лежандра, для чего выведем сначала некоторую формулу приведения. Рассмотрим интеграл

$$I_{nm}^{(k)}=\int_{-1}^{+1}P_n^{(k)}(x)\,P_m^{(k)}(x)\,dx. \tag{4.51}$$

Подставляя сюда вместо присоединенных функций их выражения, определяемые формулой (4.26), имеем

$$I_{nm}^{(k)}=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^k\frac{d^kP_n}{dx^k}\,\frac{d^kP_m}{dx^k}\,dx$$

а применяя здесь формулу интегрирования по частям, получим

$$I_{nm}^{(k)} = -\int_{-1}^{+1} \frac{d^{k-1}P_m}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^k \frac{d^kP_n}{dx^k}\right] dx. \tag{4.52}$$

С другой стороны, многочлен Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяет уравнению (4.21), что дает тождество

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество $k-1$ раз, получим новое тождество

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}} \equiv 0,$$

которое после применения формулы Лейбница примет вид

$$(1-x^2)\frac{d^{k+1}P_n}{dx^{k+1}} - 2kx\frac{d^kP_n}{dx^k} - [k(k-1) - n(n+1)]\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}} \equiv 0,$$

а последнее, после умножения на $(1-x^2)^{k-1}$, может быть написано следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^k \frac{d^kP_n}{dx^k}\right] \equiv [k(k-1) - n(n+1)](1-x^2)^{k-1}\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}}.$$

С помощью этого тождества формула (4.52) напишется в виде

$$I_{nm}^{(k)} = (n+k)(n+1-k)I_{nm}^{(k-1)}. \tag{4.53}$$

Заменяя здесь k последовательно на $k-1$, $k-2$, ..., 2, 1, мы получим следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}
I_{nm}^{(k-1)} &= (n+k-1)(n+2-k)I_{nm}^{(k-2)}, \\
I_{nm}^{(k-2)} &= (n+k-2)(n+3-k)I_{nm}^{(k-3)}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
I_{nm}^{(2)} &= (n+2)(n-1)I_{nm}^{(1)}, \\
I_{nm}^{(1)} &= (n+1)\,nI_{nm}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Перемножая все эти равенства вместе с равенством (4.53), получим после сокращений

$$I_{nm}^{(k)} = \{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+2)(n+1)\} \times$$
$$\times \{[n-(k-1)][n-(k-2)][n-(k-3)]\dots[n-1]\,n\}\,I_{nm}^{(0)}.$$

что можно записать, очевидно, следующим образом:

$$I_{nm}^{(k)}=\frac{(n+k)!}{(n-k)!}I_{nm}^{(0)}. \tag{4.54}$$

Но

$$I_{nm}^{(0)}=\int\limits_{-1}^{+1}P_n(x)P_m(x)\,dx,$$

а поэтому формулы (4.49) и (4.50) позволяют получить из (4.54) следующие соотношения:

$$\int\limits_{-1}^{+1}P_n^{(k)}(x)P_m^{(k)}(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n), \tag{4.55}$$

и для $m=n$:

$$\int\limits_{-1}^{+1}[P_n^{(k)}(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \tag{4.56}$$

Эти равенства показывают, что всякая система функций

$$P_0^{(k)}(x),\quad P_1^{(k)}(x),\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x),\ \ldots,$$

для которых k имеет определенное значение, образует ортогональную (но не нормированную) в промежутке $(-1,\ +1)$ последовательность.

3. Наконец, обратимся к элементарным сферическим функциям (4.8) n-го порядка, которые образуют полный набор из $2n+1$ функций. Эти функции мы можем обозначить так:

$$Y_{n0},\ Y_{n1},\ \ldots,\ Y_{nn},\ Y_{n,\,n+1},\ \ldots,\ Y_{n,\,2n},$$

и какую-нибудь будем обозначать через Y_{ns}, где s пробегает все значения от нуля до $2n$. Наряду с числом s будем рассматривать еще число k, полагая $s=k$, если $s\leqslant n$, и $s=n+k$, если $s\geqslant n+1$. Таким образом,

$$Y_{ns}(\theta,\ \lambda)=P_n^{(k)}(\nu)\cos k\lambda \qquad s\leqslant n \quad (k=s),$$

$$Y_{ns}(\theta,\ \lambda)=P_n^{(k)}(\nu)\sin k\lambda \qquad s\geqslant n+1 \quad (k=s-n).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I_{n,\,m}^{(s,\,\sigma)}=\iint\limits_{(\Omega)}Y_{ns}Y_{m\sigma}\,d\omega, \tag{4.57}$$

где интегрирование распространено на всю сферу Ω единичного радиуса. Покажем, что если функции Y_{ns} и $Y_{m\sigma}$ отличаются друг от друга хотя бы одним значком, то интеграл (4.57) равен нулю. Действительно, так как $\nu=\cos\theta$, то элемент площади сферы $d\omega=\sin\theta\,d\theta\,d\nu$ можно заменить через $d\nu\,d\lambda$ и интегрирование по ν вести в пределах от -1 до $+1$.

Тогда можем написать

$$I_{n,\,m}^{(s,\,\sigma)}=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}P_n^{(k)}(\nu)\,P_m^{(\varkappa)}(\nu)\,\frac{\cos}{\sin}(k\lambda)\,\frac{\cos}{\sin}(\varkappa\lambda)\,d\nu\,d\lambda=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos}{\sin}(k\lambda)\frac{\cos}{\sin}(\varkappa\lambda)\,d\lambda\int\limits_{-1}^{+1}P_n^{(k)}(\nu)\,P_m^{(\varkappa)}(\nu)\,d\nu.$$

Если теперь $\varkappa\neq k$, то первый множитель, т. е. интеграл, взятый по долготе λ, равен, очевидно, нулю и весь двойной интеграл также равен нулю. Если же $\varkappa=k$, но $m\neq n$, то второй интеграл равен нулю в силу равенства (4.55), и мы имеем окончательно

$$\iint\limits_{(\Omega)}Y_{ns}Y_{m\sigma}\,d\omega=0\qquad\begin{pmatrix}\sigma\neq s & \\ \sigma=s, & m\neq n\end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

По аналогии с определением ортогональности функций одного переменного на отрезке действительной оси, мы скажем, что семейство функций (4.8) от двух переменных образует в силу (4.58) ортогональную систему функций на сфере единичного радиуса.

Найдем теперь интеграл от квадрата сферической функции, т. е. интеграл

$$I_{n,\,n}^{(s,\,s)}=\iint\limits_{(\Omega)}Y_{ns}^2\,d\omega=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2}{\sin^2}(k\lambda)\,d\lambda\int\limits_{-1}^{+1}\left[P_n^{(k)}(\nu)\right]^2d\nu.$$

Если $k\neq 0$, то

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2}{\sin^2}(k\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1\pm\cos 2k\lambda)\,d\lambda=\pi,$$

а если $k=0$, то

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2}{\sin^2}(0\cdot\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}2\pi,\\ 0,\end{cases}$$

и мы получим

$$I_{n,\,n}^{(s,\,s)}=\iint\limits_{(\Omega)}Y_{ns}^2\,d\omega=\frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \tag{4.59}$$

где δ_k обозначает число, определяемое условиями

$$\delta_0=2,\quad \delta_k=1\qquad (k>0).$$

Равенства (4.58) и (4.59) могут быть написаны также следующим образом:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,P_m^{(k)}(\cos\theta)\,{\cos \atop \sin}(k\lambda)\,{\cos \atop \sin}(\varkappa\lambda)\sin\theta\,d\theta\,d\lambda = 0 \qquad (4.60)$$

и

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\lambda\right]^2 \sin\theta\,d\theta\,d\lambda = \frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad (4.61)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\lambda\right]^2 \sin\theta\,d\theta\,d\lambda = \frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \qquad (4.62)$$

Примечание. Обращаясь к общей сферической функции n-го порядка, определяемой формулой (4.9), заметим, что эта формула может быть написана также в виде

$$Y_n(\theta,\ \lambda) = \sum_{s=0}^{2n} a_{ns} Y_{ns}(\theta,\ \lambda),$$

где a_{ns} обозначают $2n+1$ постоянных коэффициентов.

Отсюда в силу равенства (4.58) немедленно выводим, что если $m \neq n$, то

$$\iint_{(\Omega)} Y_n(\theta,\ \lambda)\,Y_m(\theta,\ \lambda)\,d\omega = 0,$$

откуда следует, что бесконечная последовательность сферических функций от двух переменных θ и λ

$$Y_0(\theta,\ \lambda),\quad Y_1(\theta,\ \lambda),\ \ldots,\ Y_n(\theta,\ \lambda),\ \ldots$$

образует на сфере единичного радиуса ортогональную систему функций.

Далее, при помощи равенства (4.59) найдем

$$\iint_{(\Omega)} Y_n^2(\theta,\ \lambda)\,d\omega = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n} \delta_k a_{ns}^2\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

где по-прежнему $k=s$, если $s \leqslant n$, и $k=s-n$, если $s \geqslant n+1$.

4. Свойство ортогональности сферических функций позволяет представить функцию, заданную на поверхности сферы, в виде ряда сферических функций, аналогичному ряду Фурье для функции одной переменной.

Действительно, пусть дана функция $f(\theta,\ \lambda)$, конечная, однозначная и непрерывная на всей поверхности сферы Ω единичного радиуса. Допустим, что эта функция может быть представлена в виде бесконечной суммы сферических функций вида

$$f(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} a_{ns} Y_{ns}(\theta, \lambda). \tag{4.63}$$

Для определения коэффициентов этого разложения мы можем применить, благодаря свойству ортогональности, тот же самый прием, при помощи которого находятся коэффициенты ряда Фурье.

В самом деле, умножим обе части формулы (4.63) на Y_{ns} и результат проинтегрируем по всей сфере Ω. Имея в виду формулы (4.58) и (4.59), мы получим в результате

$$a_{ns}=\frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\iint\limits_{(\Omega)} f(\theta, \lambda) Y_{ns}(\theta, \lambda)\, d\omega. \tag{4.64}$$

По этой формуле можно найти все коэффициенты разложения (4.63) и остается рассмотреть вопрос о сходимости полученного ряда.

Этот вопрос будет рассмотрен несколько далее.

§ 6. Формула сложения сферических функций

1. Выведем одну важную формулу, называемую **формулой сложения сферических функций**. Для этого заметим, что, как уже было показано, все элементарные сферические функции n-го порядка могут быть выражены через многочлен Лежандра $P_n(\nu)$, где $\nu=\cos\theta$, который является, таким образом, функцией угла, образованного радиусом-вектором точки сферы единичного радиуса $M(\theta, \lambda)$ с положительным направлением оси Oz

Пусть $M'(\theta', \lambda')$ есть заданная точка сферы Ω, а γ — угол между радиусами-векторами точек M и M'.

Мы имеем

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda'). \tag{4.65}$$

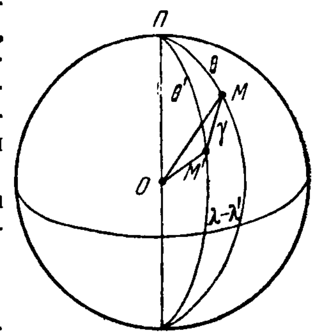

Рис. 25.

Преобразуем первоначальную систему координат таким образом, чтобы новая ось аппликат Oz' проходила через точку M' (рис. 25).

Тогда $P_n(\cos\gamma)$ есть основная сферическая функция в новой системе координат. Но эта функция является, конечно, сферической и в старой системе координат, а поэтому она должна