ного радиуса. Допустим, что эта функция может быть представлена в виде бесконечной суммы сферических функций вида

$$f(\theta,\ \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{s=0}^{2n} a_{ns}Y_{ns}(\theta,\ \lambda). \tag{4.63}$$

Для определения коэффициентов этого разложения мы можем применить, благодаря свойству ортогональности, тот же самый прием, при помощи которого находятся коэффициенты ряда Фурье.

В самом деле, умножим обе части формулы (4.63) на Y_{ns} и результат проинтегрируем по всей сфере Ω. Имея в виду формулы (4.58) и (4.59), мы получим в результате

$$a_{ns}=\frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\iint\limits_{(\Omega)} f(\theta,\ \lambda)\,Y_{ns}(\theta,\ \lambda)\,d\omega. \tag{4.64}$$

По этой формуле можно найти все коэффициенты разложения (4.63) и остается рассмотреть вопрос о сходимости полученного ряда.

Этот вопрос будет рассмотрен несколько далее.

§ 6. Формула сложения сферических функций

1. Выведем одну важную формулу, называемую формулой сложения сферических функций. Для этого заметим, что, как уже было показано, все элементарные сферические функции n-го порядка могут быть выражены через многочлен Лежандра $P_n(\nu)$, где $\nu=\cos\theta$, который является, таким образом, функцией угла, образованного радиусом-вектором точки сферы единичного радиуса $M(\theta,\ \lambda)$ с положительным направлением оси Oz

Пусть $M'(\theta',\ \lambda')$ есть заданная точка сферы Ω, а γ — угол между радиусами-векторами точек M и M'.

Мы имеем

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda'). \tag{4.65}$$

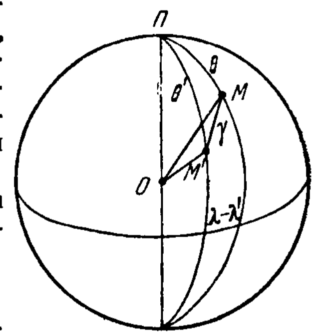

Рис. 25.

Преобразуем первоначальную систему координат таким образом, чтобы новая ось аппликат Oz' проходила через точку M' (рис. 25).

Тогда $P_n(\cos\gamma)$ есть основная сферическая функция в новой системе координат. Но эта функция является, конечно, сферической и в старой системе координат, а поэтому она должна выражаться через элементарные функции по формуле (4.9), т. е. мы должны иметь

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda], \qquad (4.66)$$

где коэффициенты A_{nk} и B_{nk} являются постоянными относительно переменных θ и λ, но, разумеется, являются функциями от θ' и λ'. Так как $\cos\gamma$ симметрично относительно координат точек M и M', то и правая часть равенства (4.66) тоже должна быть симметричной относительно этих же координат, а отсюда следует, что коэффициенты A_{nk} и B_{nk} должны иметь вид

$$\left.\begin{matrix} A_{nk} \\ B_{nk}\end{matrix}\right\}=h_k P_n^{(k)}(\cos\theta')\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(k\lambda'),$$

где h_k — зависящие от n числовые коэффициенты.

Следовательно, формула (4.66) должна иметь вид

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{k=0}^{n} h_k P_n^{(k)}(\cos\theta)\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k(\lambda-\lambda'). \qquad (4.66')$$

Чтобы найти коэффициенты h_k, рассмотрим частный случай равенства (4.66), когда $\theta'=0$.

Полагая для сокращения

$$\cos\theta=\cos\theta'=\nu, \quad \lambda-\lambda'=\omega,$$

напишем равенство (4.66') следующим образом:

$$P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]=\sum_{k=0}^{n} h_k\,[P_n^{(k)}(\nu)]^2\cos k\omega. \qquad (4.67)$$

С другой стороны, формула (4.31) дает следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega].$$

Интегрируя обе части этого равенства по ν в пределах от -1 до $+1$, имеем

$$\frac{2}{\sqrt{2\alpha(1-\cos\omega)}}\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha(1-\cos\omega)}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos\omega}}\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha(1-\cos\omega)}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu.$$

Дифференцируя полученное равенство, которое является тождеством, по α, мы получим после упрощения

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\alpha^n\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu. \quad (4.68)$$

Разложим левую часть равенства (4.68) тоже по степеням величины α. Для этого заметим, что, как легко проверить *),

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha e^{i\omega}}+\frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}}-1,$$

а поэтому мы будем иметь

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(e^{ni\omega}+e^{-ni\omega})=$$

$$=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos n\omega=1+2\alpha\cos\omega+2\alpha^2\cos 2\omega+\ldots$$

Теперь находим

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=$$

$$=(1+\alpha+\alpha^2+\ldots)(1+2\alpha\cos\omega+2\alpha^2\cos 2\omega+\ldots)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(1+2\cos\omega+2\cos 2\omega+\ldots+2\cos n\omega).$$

Сравнение этого равенства с равенством (4.68) дает

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=1+2\cos\omega+\ldots+2\cos n\omega$$

---

*) Для этого нужно воспользоваться формулой Эйлера $2\cos\omega=e^{i\omega}+e^{-i\omega}$ и разложить затем дробь на сумму элементарных слагаемых.

или

$$\int_{-1}^{+1} P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\cos k\omega. \tag{4.69}$$

Возвращаясь теперь к равенству (4.67), проинтегрируем обе его части по ν в пределах от -1 до $+1$, что дает

$$\int_{-1}^{+1} P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\sum_{k=0}^{n} h_k\cos k\omega\int_{-1}^{+1}\left[P_n^{(k)}(\nu)\right]^2 d\nu.$$

Отсюда с помощью формулы (4.56) получаем

$$\int_{-1}^{+1} P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n} h_k\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\cos k\omega. \tag{4.69'}$$

Приравнивая теперь правые части равенств (4.69) и (4.69'), а затем сравнивая коэффициенты при $\cos k\omega$ в левой и правой частях получившегося равенства, мы найдем

$$h_k=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!},$$

где, как и раньше, $\delta_0=2$, $\delta_1=\delta_2=\ldots=1$.

Заменяя, наконец, в формуле (4.66') коэффициенты h_k полученными их выражениями, имеем окончательно

$$P_n(\cos\gamma)=P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\omega)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\cos\theta)\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\omega, \tag{4.70}$$

что и есть искомая формула сложения для сферических функций.

2. Заметим, между прочим, что из формулы сложения (4.70) можно получить еще одну формулу для многочлена Лежандра. Действительно, положим в формуле (4.70) $\theta=\theta'=\frac{\pi}{2}$, что дает

$$P_n(\cos\omega)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\left[P_n^{(k)}(0)\right]^2\cos k\omega.$$

Но формулы (4.26), (4.29) и (4.30) дают нам следующее выражение для присоединенной функции Лежандра:

$$P_n^{(k)}(\nu)=(1-\nu^2)^{\frac{k}{2}}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-k}{2}\right)} P_{ns}^{(k)}\nu^{n-2s-k}.$$

где коэффициенты определяются формулой

$$P_{ns}^{(k)} = (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s!\,(n-s)!\,(n-2s-k)!}$$

Из формулы для $P_n^{(s)}(\nu)$ непосредственно усматриваем, что $P_n^{(k)}(0)$ равно нулю, если $n-k$ есть число нечетное. Если же $n-k$ есть число четное, то, полагая $n-k=2k'$, будем иметь

$$P_n^{(k)}(0) = (-1)^{k'} \frac{(n+k)!}{2^n k'!\,(n-k')!}.$$

Используя это равенство, можно представить выражение для $P_n(\cos\omega)$ в следующем виде:

$$P_n(\cos\omega) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \overline{P}_{nk} \cos(n-2k)\,\omega, \tag{4.71}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$\overline{P}_{nk} = \frac{2}{\delta_{n-2k}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}. \tag{4.71'}$$

Например, формулы (4.71) и (4.71′) дают

$$P_2(\cos\omega) = \frac{1}{4}(3\cos 2\omega + 1),$$

$$P_3(\cos\omega) = \frac{1}{8}(5\cos 3\omega + 3\cos\omega),$$

$$P_4(\cos\omega) = \frac{1}{64}(35\cos 4\omega + 20\cos 2\omega + 9),$$

$$P_5(\cos\omega) = \frac{1}{128}(63\cos 5\omega + 35\cos 3\omega + 30\cos\omega),$$

$$P_6(\cos\omega) = \frac{1}{512}(231\cos 6\omega + 126\cos 4\omega + 105\cos 2\omega + 50),$$

$$P_7(\cos\omega) = \frac{1}{1024}(429\cos 7\omega + 231\cos 5\omega + 189\cos 3\omega + 175\cos\omega).$$

§ 7. Разложение по сферическим функциям

1. Перейдем теперь к разложению функции, заданной на поверхности сферы Ω единичного радиуса, в ряд по сферическим функциям.

Пусть нам дана функция $f(\theta, \lambda)$ от двух независимых переменных — сферических координат θ и λ произвольной точки M сферы Ω.