где коэффициенты определяются формулой

$$P_{ns}^{(k)} = (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s!\,(n-s)!\,(n-2s-k)!}$$

Из формулы для $P_n^{(s)}(\nu)$ непосредственно усматриваем, что $P_n^{(k)}(0)$ равно нулю, если $n-k$ есть число нечетное. Если же $n-k$ есть число четное, то, полагая $n-k=2k'$, будем иметь

$$P_n^{(k)}(0) = (-1)^{k'} \frac{(n+k)!}{2^n k'!\,(n-k')!}.$$

Используя это равенство, можно представить выражение для $P_n(\cos\omega)$ в следующем виде:

$$P_n(\cos\omega) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \overline{P}_{nk} \cos(n-2k)\,\omega, \tag{4.71}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$\overline{P}_{nk} = \frac{2}{\delta_{n-2k}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}. \tag{4.71'}$$

Например, формулы (4.71) и (4.71′) дают

$$P_2(\cos\omega) = \frac{1}{4}(3\cos 2\omega + 1),$$

$$P_3(\cos\omega) = \frac{1}{8}(5\cos 3\omega + 3\cos\omega),$$

$$P_4(\cos\omega) = \frac{1}{64}(35\cos 4\omega + 20\cos 2\omega + 9),$$

$$P_5(\cos\omega) = \frac{1}{128}(63\cos 5\omega + 35\cos 3\omega + 30\cos\omega),$$

$$P_6(\cos\omega) = \frac{1}{512}(231\cos 6\omega + 126\cos 4\omega + 105\cos 2\omega + 50),$$

$$P_7(\cos\omega) = \frac{1}{1024}(429\cos 7\omega + 231\cos 5\omega + 189\cos 3\omega + 175\cos\omega).$$

§ 7. Разложение по сферическим функциям

1. Перейдем теперь к разложению функции, заданной на поверхности сферы Ω единичного радиуса, в ряд по сферическим функциям.

Пусть нам дана функция $f(\theta, \lambda)$ от двух независимых переменных — сферических координат θ и λ произвольной точки M сферы Ω.

Предположим, что в каждой точке M сферы Ω эта функция конечна, однозначна и непрерывна, и покажем, что ее можно представить рядом вида

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda), \tag{4.72}$$

где $Y_n(\theta, \lambda)$ — сферическая функция n-го порядка

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda], \tag{4.73}$$

коэффициенты которой полностью определяются функцией $f(\theta, \lambda)$.

Мы уже отметили в конце § 5, что эти коэффициенты определяются при помощи свойства ортогональности однозначно, так что всегда можно составить ряд (4.72) и нам остается только рассмотреть вопрос о его сходимости.

В этом параграфе мы составим более удобные формулы для определения коэффициентов ряда и дадим доказательство его сходимости.

Подставляя выражения (4.73) для Y_n в формулу (4.72), мы имеем

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda]. \tag{4.74}$$

Для определения коэффициентов этого разложения применим, как уже было отмечено выше, тот же прием, который используется и при определении коэффициентов обыкновенного ряда Фурье.

Заменим в формуле (4.74) координаты точки M, которую будем считать фиксированной, на координаты θ' и λ' текущей точки M', затем помножим обе части полученного равенства на элементарную сферическую функцию

$$P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda' \quad \text{или} \quad P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda',$$

и результат проинтегрируем по всей поверхности сферы Ω.

Тогда, используя формулы (4.60) — (4.62), выражающие свойство ортогональности сферических функций, мы получим

$$\left.\begin{aligned} A_{nk} &= \frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda')\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda'\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda', \\ B_{nk} &= \frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda')\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda'\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'. \end{aligned}\right\} \tag{4.75}$$

Эти формулы показывают, что если ряд (4.74) сходится равномерно, то это разложение единственно. Коэффициенты A_{nk} и B_{nk}, вполне определяемые заданием функции $f(\theta, \lambda)$, можно назвать **коэффициентами Фурье** для этой функции.

Переходим теперь к доказательству сходимости ряда (4.74), коэффициенты которого определяются формулами (4.75).

Положим для этого

$$S_m(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda\right]. \tag{4.76}$$

Подставляя сюда вместо A_{nk} и B_{nk} их выражения, определяемые формулами (4.75), и используя формулу сложения (4.70), мы можем написать

$$S_m(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{m}\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta', \lambda')P_n(\cos\gamma)\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'$$

или

$$S_m(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{m}\frac{2n+1}{4\pi}\iint_{(\Omega)}f(M')P_n(\cos\gamma')\,d\omega', \tag{4.77}$$

где $d\omega'$ — элемент поверхности сферы Ω.

Введем для упрощения новую систему координат, в которой за ось аппликат принято направление $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 25). Тогда одна из новых координат точки M' есть γ, а новую долготу обозначим через φ, так что будем иметь $d\omega'=\sin\gamma\,d\gamma\,d\varphi$.

Теперь формула (4.77) напишется в виде

$$S_m(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{m}\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma\int_0^{2\pi}f(M')\,d\varphi.$$

Введем новую функцию, которая представляет собой среднее значение функции $f(M')$ на различных параллелях в новой системе, полагая

$$\Phi(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(M')\,d\varphi. \tag{4.78}$$

Тогда

$$S_m(\theta, \lambda)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}(2n+1)\int_0^{\pi}\Phi(\gamma)P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma. \tag{4.79}$$

Введем в этой формуле новую переменную интегрирования x, полагая $x=\cos\gamma$ и положим еще *)

$$\Phi(\gamma)=\Phi(\arccos x)=\Psi(x).$$

Тогда формула (4.79) примет вид

$$S_m(0, \lambda)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi(x)\left[\sum_{n=0}^{m}(2n+1)P_n(x)\right]dx.$$

Применяя здесь рекуррентную формулу (4.41), имеем

$$S_m(\theta, \lambda)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P'_{m+1}(x)+P'_m(x)\right]\Psi(x)\,dx. \tag{4.80}$$

Так как, по условию, функция $f(M')$ непрерывна на сфере, то функция $\Psi(x)$ имеет в промежутке $-1\leqslant x\leqslant+1$ непрерывную производную. Поэтому мы можем применить в формуле (4.80) правило интегрирования по частям, что дает

$$S_m(\theta, \lambda)=\frac{1}{2}\left\{[P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi(x)\right\}_{-1}^{+1}-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx.$$

Но, как мы нашли в § 4,

$$P_{m+1}(+1)=P_m(+1)=1,\quad P_m(-1)=-P_{m+1}(-1)=(-1)^m,$$

вследствие чего получаем

$$S_m(\theta, \lambda)=\Psi(+1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx, \tag{4.81}$$

или, так как

$$\Psi(+1)=\Phi(0)=f(M)=f(\theta, \lambda),$$

то

$$S_m(\theta, \lambda)=f(\theta, \lambda)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx. \tag{4.82}$$

Теперь докажем, что интеграл, входящий в формулу (4.82), стремится к нулю при $m\to\infty$. Пусть A есть наибольшая величина абсолютного значения непрерывной функции $\Psi'(x)$ в промежутке $(-1, +1)$. Тогда

$$\left|\int_{-1}^{+1}[P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx\right|\leqslant A\int_{-1}^{+1}\{|P_{m+1}(x)|+|P_m(x)|\}\,dx.$$

*) При $\gamma=0$, $x=+1$ и при $\gamma=\pi$, $x=-1$. Кроме того, $dx=-\sin\gamma\,d\gamma$.

Применяя неравенство Шварца *), мы имеем

$$\left\{\int_{-1}^{+1} |P_m(x)|\,dx\right\}^2 \leqslant \int_{-1}^{+1} P_m^2(x)\,dx \int_{-1}^{+1} 1^2\,dx = 2\int_{-1}^{+1} P_m^2(x)\,dx$$

или в силу формулы (4.50)

$$\int_{-1}^{+1} |P_m(x)|\,dx \leqslant \frac{2}{\sqrt{2m+1}},$$

откуда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-1}^{+1} |P_m(x)|\,dx = 0,$$

а следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-1}^{+1} [P_{m+1}(x) + P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx = 0.$$

Поэтому равенство (4.82) дает в пределе

$$\lim_{m\to\infty} S_m(\theta, \lambda) = f(\theta, \lambda), \tag{4.83}$$

что и доказывает равномерную на всей сфере Ω сходимость ряда (4.72) к заданной функции $f(\theta, \lambda)$.

Заметим, что доказанная теорема о разложимости произвольной функции, заданной на сфере единичного радиуса и удовлетворяющей только некоторым условиям достаточно общего вида, в ряд по сферическим функциям показывает также, что *сферические функции образуют полную систему ортогональных на сфере единичного радиуса функций.*

Это важное предложение было доказано впервые А. М. Ляпуновым **).

2. Рассмотрим один важный частный случай, когда заданная функция зависит только от угла θ. Тогда формулы (4.75) дают

$$A_{nk} = B_{nk} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$A_{n0} = a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta') P_n(\cos\theta') \sin\theta'\,d\theta'. \tag{4.84}$$

---

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 3, или В. И. Смирнов, Курс высшей математики. Формула Шварца имеет вид

$$\left\{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)\,dx.$$

**) См. А. М. Ляпунов, Собрание сочинений, т. 4, изд. АН СССР, 1959.

Разложение (4.74) примет для этого случая вид

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta). \tag{4.85}$$

Если заменить здесь многочлены Лежандра их тригонометрическими выражениями (4.71), то получим разложение функции $f(\theta)$ в ряд тригонометрических многочленов. Если окажется, что полученный ряд сходится абсолютно, то члены его можно переставлять как угодно и, в частности, их можно расположить так, что формула (4.85) примет вид

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \cos n\theta, \tag{4.85'}$$

и мы получим разложение нашей функции в ряд Фурье.

Если же рассматривать функцию $f(\theta)$ как функцию от косинуса θ, то, полагая $\cos\theta=x$, напишем разложение (4.85) в следующем виде:

$$f(\arccos x)=\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \tag{4.85''}$$

а формулы для коэффициентов a_n приведутся к виду

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)P_n(x)\,dx. \tag{4.84'}$$

Таким образом, получаем разложение функции $\psi(x)$, заданной в промежутке $-1\leqslant x\leqslant +1$ в ряд по многочленам Лежандра.

Если функция $\psi(x)$ есть многочлен, то и ряд (4.85″) должен приводиться к многочлену и все коэффициенты, порядок которых выше степени многочлена, должны быть равны нулю.

Пусть m — степень многочлена $T_m(x)$. Тогда

$$\int_{-1}^{+1} T_m(x)P_n(x)\,dx=0 \tag{4.86}$$

для всякого $m<n$. Если, наконец, $T_m(x)=x^m$, то

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\,dx=0 \qquad (n>m). \tag{4.86'}$$

§ 8. Классификация сферических функций

1. Соотношение (4.86) позволяет показать, что все корни многочлена Лежандра вещественны и принадлежат промежутку $(-1, +1)$. Действительно, допустим, что уравнение

$$P_n(x)=0 \tag{4.87}$$