Разложение (4.74) примет для этого случая вид

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta). \tag{4.85}$$

Если заменить здесь многочлены Лежандра их тригонометрическими выражениями (4.71), то получим разложение функции $f(\theta)$ в ряд тригонометрических многочленов. Если окажется, что полученный ряд сходится абсолютно, то члены его можно переставлять как угодно и, в частности, их можно расположить так, что формула (4.85) примет вид

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \cos n\theta, \tag{4.85'}$$

и мы получим разложение нашей функции в ряд Фурье.

Если же рассматривать функцию $f(\theta)$ как функцию от косинуса θ, то, полагая $\cos\theta=x$, напишем разложение (4.85) в следующем виде:

$$f(\arccos x)=\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \tag{4.85''}$$

а формулы для коэффициентов a_n приведутся к виду

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)P_n(x)\,dx. \tag{4.84'}$$

Таким образом, получаем разложение функции $\psi(x)$, заданной в промежутке $-1\leqslant x\leqslant +1$ в ряд по многочленам Лежандра.

Если функция $\psi(x)$ есть многочлен, то и ряд (4.85″) должен приводиться к многочлену и все коэффициенты, порядок которых выше степени многочлена, должны быть равны нулю.

Пусть m — степень многочлена $T_m(x)$. Тогда

$$\int_{-1}^{+1} T_m(x)P_n(x)\,dx=0 \tag{4.86}$$

для всякого $m<n$. Если, наконец, $T_m(x)=x^m$, то

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\,dx=0 \qquad (n>m). \tag{4.86'}$$

§ 8. Классификация сферических функций

1. Соотношение (4.86) позволяет показать, что все корни многочлена Лежандра вещественны и принадлежат промежутку $(-1, +1)$. Действительно, допустим, что уравнение

$$P_n(x)=0 \tag{4.87}$$

имеет несколько пар комплексных сопряженных корней и предположим, сверх того, что среди вещественных корней этого уравнения одна их часть принадлежит промежутку $(-1, +1)$, а другая лежит вне этого промежутка.

Тогда многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде произведения трех множителей *):

$$P_n(x) = P'_n(x)\, P''_n(x)\, P'''_n(x), \tag{4.87'}$$

причем первый множитель имеет только комплексные корни многочлена $P_n(x)$, второй множитель $P''_n(x)$ обладает лишь теми вещественными корнями многочлена $P_n(x)$, которые лежат вне отрезка $(-1, +1)$; наконец, третий множитель $P'''_n(x)$ обладает лишь теми вещественными корнями многочлена $P_n(x)$, которые находятся в промежутке $(-1, +1)$. Благодаря такому значению многочленов $P'_n(x)$ и $P''_n(x)$ произведение $P'_nP''_n$ не обращается в нуль ни при каком значении x, лежащем внутри промежутка $(-1, +1)$, и, следовательно, сохраняет один и тот же знак внутри этого промежутка.

Кроме того, если наше предположение о корнях многочлена Лежандра $P_n(x)$ справедливо, то степень многочлена $P'''_n(x)$ заведомо будет меньше, чем n, а поэтому согласно равенству (4.86) мы должны иметь

$$\int_{-1}^{+1} P'''_n(x)\, P_n(x)\, dx = 0,$$

или, заменяя $P_n(x)$ произведением трех множителей,

$$\int_{-1}^{+1} P'_n(x)\, P''_n(x)\, [P'''_n(x)]^2\, dx = 0.$$

Но это равенство содержит в себе противоречие, так как подынтегральная функция сохраняет свой знак при всех значениях x в промежутке $(-1, +1)$, т. е. в пределах интегрирования.

Следовательно, сделанное предположение о корнях многочлена $P_n(x)$ неправильно, а поэтому проведенное рассуждение доказывает, что многочлен Лежандра имеет только вещественные корни и что все эти корни лежат в промежутке от -1 до $+1$.

Вспоминая затем, что при четном n многочлен Лежандра содержит только четные степени x, заключаем, что в этом

*) «Штрихи» здесь не обозначают дифференцирование.

случае каждому положительному корню соответствует равный ему по числовому значению отрицательный корень и все n корней распадаются на $n/2$ пар, симметричных относительно нуля.

Если n нечетное, то многочлен Лежандра содержит только нечетные степени x и может быть представлен в виде произведения x на многочлен $(n-1)$-й степени, содержащий только четные степени. Поэтому в случае нечетного n многочлен Лежандра имеет один корень равный нулю, а остальные $n-1$ корней распределяются на $(n-1)/2$ пар, симметричных относительно нуля.

Рассмотрим теперь присоединенную функцию Лежандра

$$P_n^{(k)}(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}.$$

Нетрудно видеть, применяя теорему Ролля, что все корни многочлена $(n-k)$-й степени, получаемого k-кратным дифференцированием многочлена Лежандра $P_n(x)$, вещественны и лежат внутри промежутка $(-1, +1)$, располагаясь симметрично относительно нуля.

Так как $(1-x^2)^{\frac{k}{2}}$ обращается в нуль только при $x \pm 1$, то присоединенная функция Лежандра обращается в нуль при $x=-1$, $x=+1$ и, кроме того, $n-k$ раз внутри промежутка от -1 до $+1$.

2. Обратимся теперь к распределению элементарных сферических функций на классы, т. е. проведем их классификацию.

Сферическая функция $Y_{n0}=P_n$ обращается в нуль при n неравных вещественных значениях $\cos\theta$, симметричных по отношению к нулю; этим значениям корней соответствуют n значений дополнения до широты θ, симметричных по отношению к экватору сферы $\left(\theta=\frac{\pi}{2}, \cos\theta=0\right)$. Иными словами, функция Y_{n0} обращается в нуль на n параллелях сферы, симметрично расположенных относительно экватора. Этими параллелями вся поверхность сферы разбивается на $n+1$ сферических поясов, или *зон*, где функция Y_{n0} попеременно получает положительные и отрицательные значения. По этой причине функции $Y_{n0}(\cos\theta)$, т. е. многочлены Лежандра, называются *зональными сферическими функциями* (или *зональными гармониками*) (см. рис. 26 для $n=4$).

Рассмотрим теперь две сферические функции

$$Y_{nn} = P_n^{(n)}(\cos\theta)\cdot\cos n\lambda,$$

$$Y_{n,2n} = P_n^{(n)}(\cos\theta)\cdot\sin n\lambda.$$

Так как производная n-го порядка от многочлена n-й степени есть число постоянное, то каждая из этих двух функций обращается в нуль только на меридианах сферы, долготы которых находятся соответственно из уравнений $\cos n\lambda=0$, $\sin n\lambda=0$.

Эти меридианы разбивают всю поверхность сферы на $2n$ сферических секторов (двуугольников), внутри которых функции Y_{nn} и $Y_{n,2n}$ принимают попеременно положительные и отрицательные значения. Эти две функции называются по этой

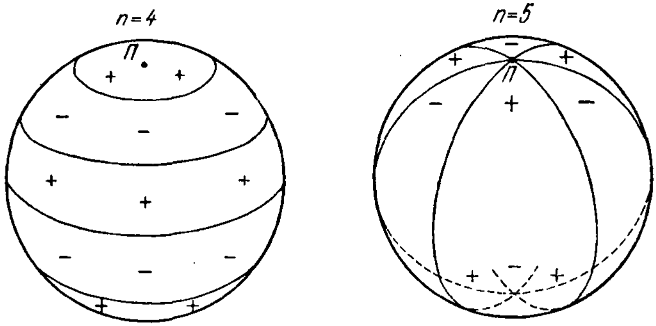

Рис. 26.

причине **секториальными сферическими функциями** (или секториальными гармониками) (рис. 26).

Обратимся теперь к оставшимся сферическим функциям в числе $2n-2$:

$$Y_{n,1}=P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\lambda,\ \ldots,\ Y_{n,n-1}=P_n^{(n-1)}(\cos\theta)\cos(n-1)\lambda,$$
$$Y_{n,n+1}=P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\lambda,\ \ldots,\ Y_{n,2n-1}=P_n^{(n-1)}(\cos\theta)\sin(n-1)\lambda,$$

и рассмотрим какую-нибудь из них. Многочлен $\frac{d^kP_k}{d\nu^k}$ имеет, как уже было отмечено, $n-k$ вещественных корней, расположенных симметрично относительно нуля; этим корням соответствуют $n-k$ значений полярного расстояния θ, распределенных симметрично относительно экватора сферы. Ими определяются $n-k$ параллелей, которыми вся сфера делится на $n-k+1$ зон; затем каждый из множителей $\cos k\lambda$ или $\sin k\lambda$ обращается в нуль для $2k$ значений долготы λ, т. е. на $2k$ меридианах, отстоящих друг от друга на π/k.

Этой сеткой меридианов и параллелей вся сфера делится на сферические четырехугольники (кроме полярных областей, где образуются треугольники); в каждых двух прилежащих четырехугольниках рассматриваемые функции попеременно положительны и отрицательны. Поэтому эти сферические функции называются тессеральными сферическими функциями (или тессеральными гармониками*)) (см. рис. 27, на котором изображено деление сферы, соответствующее функции $Y_{11,6}$).

Таким образом, в системе $2n+1$ основных (или элементарных) сферических функций n-го порядка имеется одна зональная, две секториальные и $2n-2$ тессеральных.

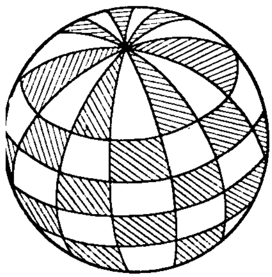

Рис. 27.

Все эти функции суть функции колеблющиеся (осциллирующие) на единичной сфере, подобно тому как $\cos k\lambda$ и $\sin k\lambda$ суть функции, колеблющиеся на окружности единичного радиуса.

Повышая порядок сферических функций, мы как бы облекаем сферу Ω правильной системой постепенно уменьшающихся участков, на границе которых происходит перемена знака сферических функций.

Таким образом, задача о разложении заданной на сфере Ω функции $f(\theta, \lambda)$ в ряд сферических функций есть задача о наилучшем приближении к заданной совокупности ее значений на сфере путем комбинации осциллирующих функций. А это, по существу самого метода, совершенно соответствует задаче о разложении функции одной переменной в тригонометрический ряд Фурье.

§ 9. Формула Лежандра

1. Мы закончим очерк теории сферических функций**) выводом одной интересной формулы, принадлежащей Лежандру, которая найдет свое применение в следующей главе.

Рассмотрим сначала интеграл

$$F_n(k) = \int_{-1}^{+1} x^k P_n(x)\,dx, \tag{4.88}$$

где k обозначает целое положительное число.

Непосредственно очевидно, что при любом k, для которого $n+k$ есть число нечетное***), интеграл (4.88) равен нулю.

*) Название «тессеральные» эти функции получили от греческого слова «тессера», что означает «четыре». В итальянском языке слово tessera означает «плиточка».

**) Более подробное изложение теории сферических функций можно найти в трактате Тиссерана или в обширной монографии Гобсона (см. список литературы).

***) Действительно, если $n+k$ — число нечетное, то интеграл распадается на сумму интегралов от одночленов нечетной степени.