называются **тессеральными сферическими функциями** (или **тессеральными гармониками***)) (см. рис. 27, на котором изображено деление сферы, соответствующее функции $Y_{11,6}$).

Таким образом, в системе $2n+1$ основных (или элементарных) сферических функций n-го порядка имеется одна зональная, две секториальные и $2n-2$ тессеральных.

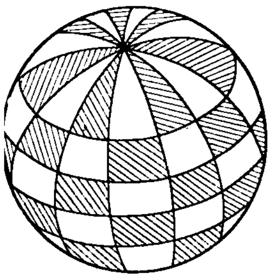

Рис. 27.

Все эти функции суть функции колеблющиеся (осциллирующие) на единичной сфере, подобно тому как $\cos k\lambda$ и $\sin k\lambda$ суть функции, колеблющиеся на окружности единичного радиуса.

Повышая порядок сферических функций, мы как бы облекаем сферу Ω правильной системой постепенно уменьшающихся участков, на границе которых происходит перемена знака сферических функций.

Таким образом, задача о разложении заданной на сфере Ω функции $f(\theta, \lambda)$ в ряд сферических функций есть задача о наилучшем приближении к заданной совокупности ее значений на сфере путем комбинации осциллирующих функций. А это, по существу самого метода, совершенно соответствует задаче о разложении функции одной переменной в тригонометрический ряд Фурье.

§ 9. Формула Лежандра

1. Мы закончим очерк теории сферических функций **) выводом одной интересной формулы, принадлежащей Лежандру, которая найдет свое применение в следующей главе.

Рассмотрим сначала интеграл

$$F_n(k) = \int_{-1}^{+1} x^k P_n(x)\,dx, \tag{4.88}$$

где k обозначает целое положительное число.

Непосредственно очевидно, что при любом k, для которого $n+k$ есть число нечетное ***), интеграл (4.88) равен нулю.

*) Название «тессеральные» эти функции получили от греческого слова «тессера», что означает «четыре». В итальянском языке слово tessera означает «плиточка».

**) Более подробное изложение теории сферических функций можно найти в трактате Тиссерана или в обширной монографии Гобсона (см. список литературы).

***) Действительно, если $n+k$ — число нечетное, то интеграл распадается на сумму интегралов от одночленов нечетной степени.

В конце § 7 (см. формулу (4.86′)) было показано, что этот интеграл равен нулю также при всяком $k<n$.

Рассмотрим теперь интеграл (4.88), когда $k \geqslant n$ и сумма $n+k$ есть число четное. Вычислим сначала $F_{2n}(2k)$ при $k \geqslant n$. Используя формулу (4.29), имеем

$$F_{2n}(2k)=\int_{-1}^{+1} x^{2k}P_{2n}(x)\,dx=2\int_{0}^{1} x^{2k}P_{2n}(x)\,dx=2\sum_{s=0}^{n}\frac{P_{2n,\,s}}{2n+2k-2s+1},$$

а приводя здесь все дроби к одному знаменателю, получим *)

$$F_{2n}(2k)=\frac{2\Phi_{2n}(2k)}{\prod\limits_{s=0}^{n}(2n+2k-2s+1)},$$

где $\Phi_{2n}(2k)$ есть некоторый многочлен относительно величины $(2k)$ степени n. Этот многочлен легко вычислить. Действительно, так как $F_{2n}(2k)$, как было показано, равно нулю при $2k<2n$, то

$$0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n-4,\ 2n-2$$

суть корни многочлена $\Phi_{2n}(2k)$, а следовательно,

$$\Phi_{2n}(2k)=A_{2n}\prod_{s=0}^{n-1}(2k-2s).$$

Но коэффициент при высшей степени $(2k)$ в многочлене $\Phi_{2n}(2k)$, очевидно, равен

$$A_{2n}=\sum_{s=0}^{n}P_{2n,\,s}=P_{2n}(1)=1,$$

и мы имеем окончательно для $k \geqslant n$:

$$F_{2n}(2k)=\int_{-1}^{+1} x^{2k}P_{2n}(x)\,dx=\frac{2\prod\limits_{s=0}^{n-1}(2k-2s)}{\prod\limits_{s=0}^{n}(2n+2k-2s+1)}. \qquad (4.88')$$

Также найдем

$$F_{2n+1}(2k+1)=\int_{-1}^{+1} x^{2k+1}P_{2n+1}(x)\,dx=\frac{2\prod\limits_{s=0}^{n-1}(2k-2s-1)}{\prod\limits_{s=0}^{n}(2n+2k-2s+2)}. \qquad (4.88'')$$

---

*) Знак $\prod\limits_{s=0}^{n}$ обозначает произведение $n+1$ множителей.

2. Вычислим теперь интеграл

$$I_n(p)=\int_{-1}^{+1}\frac{P_{2n}(x)\,dx}{(1+px^2)^{n+\frac{3}{2}}},\tag{4.89}$$

где p есть любое число, удовлетворяющее условию

$$-1<p<+1.$$

Вычисление интеграла производится совершенно элементарно. Действительно, по теореме Ньютона имеем разложение

$$(1+px^2)^{-n-\frac{3}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\dots\left(n+\frac{3}{2}+r-1\right)}{r!}(-p)^r x^{2r},$$

равномерно сходящееся в промежутке $-1\leqslant x\leqslant +1$.

Умножая обе части последнего равенства на $P_{2n}(x)$ и интегрируя почленно, мы получим

$$I_n(p)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\dots\left(n+\frac{3}{2}+r-1\right)}{r!}(-p)^r\int_{-1}^{+1}x^{2r}P_{2n}(x)\,dx.$$

Все интегралы, для которых $r<n$, в силу доказанного выше равны нулю, а поэтому предыдущую формулу можно переписать в следующем виде $(r=n+s)$:

$$I_n(p)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\dots\left(n+\frac{3}{2}+n+s-1\right)}{(n+s)!}(-p)^{n+s}F_{2n}(2n+2s).$$

Но, согласно (4.88′), мы имеем

$$F_{2n}(2n+2s)=\frac{2\prod\limits_{r=0}^{n-1}(2n+2s-2r)}{\prod\limits_{r=0}^{n}(4n+2s-2r+1)},$$

поэтому получаем

$$I_n(p)=\frac{2(-p)^n}{2n+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\dots\left(n+\frac{1}{2}+s-1\right)}{s!}(-p)^s.$$

Но, опять по теореме Ньютона, мы можем написать

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\dots\left(n+\frac{1}{2}+s-1\right)}{s!}(-p)^s=(1+p)^{-n-\frac{1}{2}},$$

а следовательно,

$$I_n(p) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n}(x)\,dx}{(1+px^2)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{4.90}$$

Это и есть формула Лежандра.

§ 10. Уравнение Ламе. Эллипсоидальные функции

1. Рассмотрим опять эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{E}$$

при условии, что

$$c \leqslant b \leqslant a;$$

будем его называть основным эллипсоидом.

Мы знаем (см. § 4 гл. III), что через всякую точку пространства $P(x, y, z)$ *) проходят три взаимно ортогональные поверхности второго порядка, софокусные с (E), соответствующие трем вещественным корням уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} = 1, \tag{E_θ}$$

где буквой θ обозначен параметр этого семейства.

Изменяя для удобства обозначения гл. III, назовем эти три корня буквами λ, μ, ν, располагая их нижеследующим порядком:

$$-a^2 \leqslant \nu \leqslant -b^2 \leqslant \mu \leqslant -c^2 \leqslant \lambda < \infty. \tag{4.91}$$

Таким образом, параметр λ соответствует эллипсоиду, параметр μ — однополостному гиперболоиду и параметр ν — двуполостному гиперболоиду.

Поэтому уравнения этих трех поверхностей напишутся соответственно в виде

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \tag{E_λ}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1, \tag{E_μ}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1. \tag{E_ν}$$

Как уже было отмечено в § 4 гл. III, эти три числа, однозначно соответствующие точке $P(x, y, z)$, называются эллипсоидальными координатами точки P и являются частным случаем общих криволинейных координат Ламе, рассмотренных в § 1 гл. III.

*) Мы обозначаем здесь координаты точки, лежащей на (E), и координаты любой точки пространства одними и теми же буквами. Из текста каждый раз ясно, о каких именно точках идет речь.