а следовательно,

$$I_n(p)=\int_{-1}^{+1}\frac{P_{2n}(x)\,dx}{(1+px^2)^{n+\frac{3}{2}}}=\frac{2}{2n+1}\,\frac{(-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{4.90}$$

Это и есть формула Лежандра.

§ 10. Уравнение Ламе. Эллипсоидальные функции

1. Рассмотрим опять эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{E}$$

при условии, что

$$c\leqslant b\leqslant a;$$

будем его называть о с н о в н ы м э л л и п с о и д о м.

Мы знаем (см. § 4 гл. III), что через всякую точку пространства $P(x, y, z)$ *) проходят три взаимно ортогональные поверхности второго порядка, софокусные с (E), соответствующие трем вещественным корням уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1, \tag{E_θ}$$

где буквой θ обозначен параметр этого семейства.

Изменяя для удобства обозначения гл. III, назовем эти три корня буквами λ, μ, ν, располагая их нижеследующим порядком:

$$-a^2\leqslant\nu\leqslant-b^2\leqslant\mu\leqslant-c^2\leqslant\lambda<\infty. \tag{4.91}$$

Таким образом, параметр λ соответствует эллипсоиду, параметр μ — однополостному гиперболоиду и параметр ν — двуполостному гиперболоиду.

Поэтому уравнения этих трех поверхностей напишутся соответственно в виде

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1, \tag{E_λ}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1, \tag{E_μ}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1. \tag{E_ν}$$

Как уже было отмечено в § 4 гл. III, эти три числа, однозначно соответствующие точке $P(x, y, z)$, называются э л л и п с о и д а л ь н ы м и к о о р д и н а т а м и точки P и являются частным случаем общих криволинейных координат Ламе, рассмотренных в § 1 гл. III.

---

*) Мы обозначаем здесь координаты точки, лежащей на (E), и координаты любой точки пространства одними и теми же буквами. Из текста каждый раз ясно, о каких именно точках идет речь.

Решая уравнения (E_λ), (E_μ) и (E_ν) относительно квадратов координат точки P, мы получим формулы, уже приведенные ранее в других обозначениях, выражающие прямоугольные декартовы координаты через эллипсоидальные:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.92}$$

Координаты μ и ν изменяются, согласно (4.91), в ограниченных пределах, но координата λ растет неограниченно, когда точка P удаляется в бесконечность и, таким образом, характеризует удаленность точки P от начала координат, а также от основного эллипсоида E. Нетрудно выразить радиус-вектор r точки P через эллипсоидальные координаты. Действительно, напишем уравнение (E_θ) в приведенном виде

$$(b^2+\theta)(c^2+\theta)x^2+(a^2+\theta)(c^2+\theta)y^2+(a^2+\theta)(b^2+\theta)z^2 = \\ =(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta) \tag{E'_θ}$$

и применим теорему Виета, что даст

$$x^2+y^2+z^2=r^2=a^2+b^2+c^2+\lambda+\mu+\nu, \tag{4.93}$$

откуда, между прочим, получим опять (см. § 8 гл. III)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{\lambda}=1.$$

Отметим еще, что $\lambda=0$ соответствует основному эллипсоиду (E); поэтому, полагая в (4.93) $\lambda=0$, мы получим радиус-вектор точки, лежащей на (E). Обозначая его через r_E, имеем

$$r_E^2=a^2+b^2+c^2+\mu+\nu,$$

вследствие чего формула (4.93) примет вид

$$r^2=r_E^2+\lambda, \tag{4.93'}$$

так что μ и ν суть координаты точки, лежащей на основном эллипсоиде (E).

Вместо криволинейных координат μ и ν точки, лежащей на (E), можно ввести другие, более простые и привычные величины. Для этого положим

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2+\lambda}\sin\varphi\cos\psi, \\ y &= \sqrt{b^2+\lambda}\sin\varphi\sin\psi, \\ z &= \sqrt{c^2+\lambda}\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{4.94}$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$ суть обычные, сферические координаты точки единичной сферы, имеющей общий центр с (E).

2. Перейдем к определению эллипсоидальных функций. Для этого отметим, что сферические функции мы определили как некоторые частные решения уравнения Лапласа, написанного в полярных сферических координатах.

Совершенно таким же образом можно определить и эллипсоидальные функции.

Составим уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах, связанных с прямоугольными декартовыми координатами формулами (4.92). Воспользовавшись формулой для оператора Лапласа (3.10) гл. III, мы сейчас же напишем (меняя обозначения) уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах:

$$(\mu-\nu) R(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[R(\lambda) \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right]+(\nu-\lambda) R(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu}\left[R(\mu) \frac{\partial V}{\partial \mu}\right]+ \\ +(\lambda-\mu) R(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[R(\nu) \frac{\partial V}{\partial \nu}\right]=0, \qquad (4.95)$$

где, как и в гл. III,

$$R(\theta)=\sqrt{\left(a^2+\theta\right)\left(b^2+\theta\right)\left(c^2+\theta\right)} \qquad (\theta=\lambda,\ \mu,\ \nu).$$

Будем теперь искать решения уравнения (4.95) в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной из эллипсоидальных координат, т. е. положим

$$V=\Lambda(\lambda) \mathrm{M}(\mu) \mathrm{N}(\nu). \qquad (4.96)$$

Подставляя это значение V в уравнение (4.95), имеем

$$\frac{\mu-\nu}{\Lambda} R(\lambda) \frac{d}{d \lambda}\left[R(\lambda) \frac{d \Lambda}{d \lambda}\right]+\frac{\nu-\lambda}{\mathrm{M}} R(\mu) \frac{d}{d \mu}\left[R(\mu) \frac{d \mathrm{M}}{d \mu}\right]+ \\ +\frac{\lambda-\mu}{\mathrm{N}} R(\nu) \frac{d}{d \nu}\left[R(\nu) \frac{d \mathrm{N}}{d \nu}\right]=0. \qquad (4.95')$$

Равенство (4.95′) будет удовлетворено, если мы положим

$$\left.\begin{array}{l} 4 \dfrac{R(\lambda)}{\Lambda} \dfrac{d}{d \lambda}\left[R(\lambda) \dfrac{d \Lambda}{d \lambda}\right]=K \lambda+C, \\ 4 \dfrac{R(\mu)}{\mathrm{M}} \dfrac{d}{d \mu}\left[R(\mu) \dfrac{d \mathrm{M}}{d \mu}\right]=K \mu+C, \\ 4 \dfrac{R(\nu)}{\mathrm{N}} \dfrac{d}{d \nu}\left[R(\nu) \dfrac{d \mathrm{N}}{d \nu}\right]=K \nu+C, \end{array}\right\} \qquad (4.95'')$$

где K и C — какие угодно постоянные.

Таким образом, каждый из трех множителей в формуле (4.96) определяется одним и тем же уравнением, но с различными обозначениями неизвестной функции и независимой переменной.

Полагая теперь

$$K=n(n+1),$$

где n — целое положительное число, и обозначая переменные стандартным образом буквами x и y, мы напишем уравнение, определяющее каждый из множителей (4.96), в виде

$$4\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}\frac{dy}{dx}\right]= \\ =[n(n+1)x+C]\,y. \qquad (4.97)$$

Уравнение (4.97) является аналитической основой для определения и изучения эллипсоидальных функций, так же как и ранее уравнение Лежандра служило для определения и изучения сферических функций. Это основное уравнение называется *уравнением Ламе**).

Уравнение Ламе можно также написать в эквивалентном виде, выполняя дифференцирование, что дает

$$4(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)\frac{d^2y}{dx^2}+ \\ +2[(b^2+x)(c^2+x)+(a^2+x)(c^2+x)+(a^2+x)(b^2+x)]\frac{dy}{dx}= \\ =[n(n+1)x+C]\,y, \qquad (4.97')$$

или также в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+x}+\frac{1}{b^2+x}+\frac{1}{c^2+x}\right]\frac{dy}{dx}= \\ =\frac{n(n+1)x+C}{4(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}\,y. \qquad (4.97'')$$

Каждому решению уравнения Ламе, которое есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка (однородное, к тому же), соответствует по формуле (4.97) некоторое решение уравнения Лапласа (4.95). Сумма любого числа таких решений, помноженных на произвольные постоянные, также будет решением уравнения (4.95).

3. Можно показать, на чем мы не будем здесь останавливаться, что для всякого целого положительного n можно найти $2n+1$ вещественных чисел

$$C_{n1},\ C_{n2},\ \ldots,\ C_{n,\,n+1},\ C_{n,\,n+2},\ \ldots,\ C_{n,\,2n+1},$$

при которых уравнение Ламе имеет решение в виде многочлена некоторой степени m относительно x, или в виде подобного многочлена, помноженного на один, два или три из выражений

$$\sqrt{a^2+x},\quad \sqrt{b^2+x},\quad \sqrt{c^2+x}.$$

---

*) См. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, перев. с англ., Гостехиздат, 1934; Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, перев. с англ., ИЛ, 1952. См. также: Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris, 1859.

Эти частные решения уравнения Ламе называются **функциями Ламе, порядка n и первого рода**, соответственно первого, второго, третьего и четвертого класса.

Обозначая такую функцию через $E_n^{(s)}(x)$, мы будем иметь, следовательно, тождество ($s=1, 2, \ldots, 2n+1$)

$$4R(x)\frac{d}{dx}\left[R(x)\frac{dE_n^{(s)}(x)}{dx}\right]\equiv[n(n+1)x+C_{ns}]\cdot E_n^{(s)}(x). \quad (4.98)$$

Каждому значению n соответствует всегда $2n+1$ этих эллипсоидальных функций. Для четного n эти функции принадлежат только к первому и третьему классам, притом так, что $\frac{1}{2}n+1$ этих функций суть многочлены степени $n/2$ (функции первого рода и первого класса) и $3n/2$ суть произведения многочлена степени $(n-2)/2$ на один из трех множителей

$$\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)},\quad \sqrt{(b^2+x)(c^2+x)},\quad \sqrt{(c^2+x)(a^2+x)}.$$

Общее число функций Ламе первого рода четного порядка n равно $\frac{1}{2}n+1+\frac{3}{2}n=2n+1$.

Для нечетного значения n функции Ламе первого рода принадлежат второму и четвертому классу, притом так, что $\frac{3}{2}(n+1)$ этих функций принадлежат второму классу и каждая из них есть произведение многочлена степени $\frac{1}{2}(n-1)$ на одно из выражений $\sqrt{a^2+x}$, $\sqrt{b^2+x}$, $\sqrt{c^2+x}$, а остальные $\frac{1}{2}(n-1)$ функций первого рода нечетного порядка суть многочлены степени $\frac{1}{2}(n-3)$, умноженные на

$$\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}.$$

Общее число функций Ламе первого рода нечетного порядка будет равно $\left(\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)=2n+1$.

Представляя функции $E_n^{(s)}(x)$ указанным образом с неопределенными коэффициентами многочленного множителя и требуя, чтобы составленное выражение удовлетворяло равенству (4.98), нетрудно найти выражения для функций Ламе и соответствующих им постоянных C_{ns} для не очень больших, по крайней мере, значений n.

Выпишем для примера выражения эллипсоидальных функций первого рода и соответствующих им постоянных C_{ns}, полученные указанным путем, для $n=0, 1, 2, 3$.

Для $n=0$ имеем только одну функцию, принадлежащую к первому классу и являющуюся многочленом нулевой степени, т. е. величину постоянную. Принимая, для большей простоты, эту постоянную равной единице, имеем

$$E_0^{(1)}(x)=1,$$

причем соответствующая постоянная C_{01} также равна единице.

Для $n=1$ имеем всего три функции Ламе, все второго класса, каждая из которых есть произведение многочлена нулевой степени на одно из выражений (4.99). Принимая опять постоянную равной единице, мы будем иметь следующие три функции первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} E_1^{(1)}(x)&=\sqrt{a^2+x},\\ E_1^{(2)}(x)&=\sqrt{b^2+x},\\ E_1^{(3)}(x)&=\sqrt{c^2+x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.99}$$

Соответствующие этим функциям постоянные C_{1s} имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} C_{11}&=b^2+c^2,\\ C_{12}&=c^2+a^2,\\ C_{13}&=a^2+b^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.99'}$$

Для $n=2$ имеем две функции первого класса, каждая из которых есть многочлен первой степени, и три функции третьего класса, каждая из которых есть произведение многочлена нулевой степени (примем его опять равным единице) на два из трех корней (4.99).

Эти функции определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} E_2^{(1)}(x)&=x+k_{21},\\ E_2^{(2)}(x)&=x+k_{22},\\ E_2^{(3)}(x)&=\sqrt{(b^2+x)(c^2+x)},\\ E_2^{(4)}(x)&=\sqrt{(c^2+x)(a^2+x)},\\ E_2^{(5)}(x)&=\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.100}$$

где *)

$$\left.\begin{matrix} k_{21}\\ k_{22}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\pm\frac{1}{3}\sqrt{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}.$$

*) Для k_{21} нужно взять знак «плюс», а для k_{22} знак «минус» или наоборот.

Соответствующие этим функциям постоянные C_{2s} имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} C_{21} &= 4(a^2+b^2+c^2)+k_{21},\\ C_{22} &= 4(a^2+b^2+c^2)+k_{22},\\ C_{23} &= 4a^2(b^2+c^2)+2b^2c^2,\\ C_{24} &= 4b^2(c^2+a^2)+2c^2a^2,\\ C_{25} &= 4c^2(a^2+b^2)+2a^2b^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.100')$$

Для $n=3$ имеем шесть функций второго класса, каждая из которых есть произведение многочлена первой степени на одно из выражений (4.99), и одну функцию четвертого класса, представляющую собой произведение многочлена нулевой степени на произведение всех трех корней (4.99). Эти функции определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} E_3^{(1)}(x) &= (x+k_{31})\sqrt{a^2+x},\\ E_3^{(2)}(x) &= (x+k_{32})\sqrt{a^2+x},\\ E_3^{(3)}(x) &= (x+k_{33})\sqrt{b^2+x},\\ E_3^{(4)}(x) &= (x+k_{34})\sqrt{b^2+x},\\ E_3^{(5)}(x) &= (x+k_{35})\sqrt{c^2+x},\\ E_3^{(6)}(x) &= (x+k_{36})\sqrt{c^2+x},\\ E_3^{(7)}(x) &= \sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.101)$$

а соответствующие им постоянные C_{3s} имеют следующие значения:

$$C_{3s} = b^2+c^2+\frac{2a^2(b^2+c^2)+6b^2c^2}{k_{3s}} \qquad (s=1,\ 2), \qquad (4.101')$$

а величины k_{3s} определяются формулой *)

$$k_{3s} = \frac{1}{5}(a^2+2b^2+2c^2) \pm \frac{1}{5}\sqrt{a^4+4b^4+4c^4-7b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}. \qquad (4.101'')$$

Остальные две пары постоянных C_{3s} и k_{3s} (для $s=3$, 4 и $s=5$, 6) получаются из выражений (4.101′) и (4.101″) циклической перестановкой букв a, b, c.

Итак, каждому значению n (целому и положительному, разумеется) соответствует $2n+1$ функций Ламе первого рода, каждая из которых является частным решением уравнения

*) Для k_{31} нужно брать знак «плюс», а для k_{32} знак «минус» или наоборот.

Ламе (4.97), в котором постоянной C нужно придать соответствующее значение, как в тождестве (4.98). Можно доказать, что все эти $2n+1$ функций между собой линейно независимы, т. е. что никакие r из них ($r \leqslant 2n+1$) не связаны линейной зависимостью с постоянными коэффициентами. Доказательства этого предложения мы здесь приводить не будем.

Зная одно частное решение уравнения Ламе, нетрудно по общему правилу найти второе его решение, линейно независимое с первым.

Такое второе решение, обращающееся вдобавок в нуль при $x=\infty$, называется *функцией Ламе второго рода*, и определяется следующей формулой:

$$F_n^{(s)}(x) = (2n+1)\,E_n^{(s)}(x)\int\limits_x^\infty \frac{dx}{R(x)\left[E_n^{(s)}(x)\right]^2}. \tag{4.102}$$

Ясно, что число функций Ламе второго рода также равно $2n+1$ и что все они между собой линейно независимы.

Теперь общее решение уравнения Ламе (4.97), в котором постоянная C имеет значение C_{ns}, запишется в виде

$$y = C_1 E_n^{(s)}(x) + C_2 F_n^{(s)}(x), \tag{4.103}$$

где C_1 и C_2 — две произвольные постоянные.

Заметим, что при помощи различных преобразований уравнению Ламе можно придать различную форму, что часто облегчает или способствует рассмотрению и изучению свойств функций Ламе. Мы не будем рассматривать эти различные формы и многочисленные свойства эллипсоидальных функций, так как нашей целью является только дать первоначальное понятие об этой области математики, находящей различные приложения в задачах естествознания и, в частности, в теории притяжения.

§ 11. Произведения Ламе и связь со сферическими функциями

1. Составим произведение трех функций Ламе одного и того же порядка и одного и того же класса, но с аргументами λ, μ, ν. Тогда функция

$$V_n^{(s)}(\lambda,\ \mu,\ \nu) = V_n^{(s)} = E_n^{(s)}(\lambda)\,E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu) \tag{4.104}$$

в силу (4.95′) и (4.95″) удовлетворит уравнению (4.95), так что

$$\nabla V_n^{(s)}(\lambda,\ \mu,\ \nu) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворит, конечно, и любая линейная комбинация (с постоянными коэффициентами) функций (4.104).