Ламе (4.97), в котором постоянной C нужно придать соответствующее значение, как в тождестве (4.98). Можно доказать, что все эти $2n+1$ функций между собой линейно независимы, т. е. что никакие r из них ($r \leqslant 2n+1$) не связаны линейной зависимостью с постоянными коэффициентами. Доказательства этого предложения мы здесь приводить не будем.

Зная одно частное решение уравнения Ламе, нетрудно по общему правилу найти второе его решение, линейно независимое с первым.

Такое второе решение, обращающееся вдобавок в нуль при $x=\infty$, называется *функцией Ламе второго рода*, и определяется следующей формулой:

$$F_n^{(s)}(x) = (2n+1) E_n^{(s)}(x) \int_x^\infty \frac{dx}{R(x)\left[E_n^{(s)}(x)\right]^2}. \qquad (4.102)$$

Ясно, что число функций Ламе второго рода также равно $2n+1$ и что все они между собой линейно независимы.

Теперь общее решение уравнения Ламе (4.97), в котором постоянная C имеет значение C_{ns}, запишется в виде

$$y = C_1 E_n^{(s)}(x) + C_2 F_n^{(s)}(x), \qquad (4.103)$$

где C_1 и C_2 — две произвольные постоянные.

Заметим, что при помощи различных преобразований уравнению Ламе можно придать различную форму, что часто облегчает или способствует рассмотрению и изучению свойств функций Ламе. Мы не будем рассматривать эти различные формы и многочисленные свойства эллипсоидальных функций, так как нашей целью является только дать первоначальное понятие об этой области математики, находящей различные приложения в задачах естествознания и, в частности, в теории притяжения.

§ 11. Произведения Ламе и связь со сферическими функциями

1. Составим произведение трех функций Ламе одного и того же порядка и одного и того же класса, но с аргументами λ, μ, ν. Тогда функция

$$V_n^{(s)}(\lambda, \mu, \nu) = V_n^{(s)} = E_n^{(s)}(\lambda) E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu) \qquad (4.104)$$

в силу (4.95′) и (4.95″) удовлетворит уравнению (4.95), так что

$$\nabla V_n^{(s)}(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворит, конечно, и любая линейная комбинация (с постоянными коэффициентами) функций (4.104).

Поэтому функция

$$V_n(\lambda,\ \mu,\ \nu)=\sum_{s=1}^{2n+1} D_n^{(s)} V_n^{(s)}(\lambda,\ \mu,\ \nu) \tag{4.104'}$$

также будет решением уравнения Лапласа (4.95) при любых постоянных значениях коэффициентов $D_n^{(s)}$.

Рассмотрим ближе функцию (4.104), которая называется произведением Ламе n-го порядка. Из сказанного выше следует, что всякая функция Ламе первого рода и порядка n представляется в следующем виде:

$$E_n^{(s)}(x)=\begin{cases} \quad n \text{ четное:} & \quad n \text{ нечетное:} \\ \quad P(x), & P(x)\sqrt{a^2+x},\ \ldots \\ P(x)\sqrt{a^2+x}\sqrt{b^2+x},\ \ldots & P(x)\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}, \end{cases}$$

где $P(x)$ обозначает соответственно многочлен степени

$$\frac{n}{2},\quad \frac{n-2}{2},\quad \frac{n-1}{2},\quad \frac{n-3}{2}.$$

Эти формулы, определяющие вид функций Ламе, вместе с уравнением (E_θ), корнями которого являются эллиптические координаты λ, μ, ν, приводят на основании теории симметрических функций корней алгебраического уравнения *) к заключению, что каждое произведение Ламе n-го порядка, преобразованное к координатам x, y, z, есть многочлен n-й степени (вообще говоря, неоднородный, но который можно разбить на сумму однородных гармонических многочленов), удовлетворяющий уравнению Лапласа.

Таким образом, функция $V_n^{(s)}$ может быть представлена в виде суммы гармонических многочленов и мы можем написать:

$$V_n^{(s)}=E_n^{(s)}(\lambda)\,E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu)=\sum_{j=1}^{n} U_j^{(s)}(x,\ y,\ z). \tag{4.105}$$

Но каждый гармонический многочлен, преобразованный к сферическим координатам r, φ, ψ, порождает объемную сферическую функцию того же порядка, так что мы можем написать также

$$E_n^{(s)}(\lambda)\,E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu)=\sum_{j=1}^{n} r^j Y_j^{(s)}(\varphi,\ \psi), \tag{4.105'}$$

что представляет соотношение между тройным произведением Ламе и объемными сферическими функциями того же порядка.

---

*) См., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры (любое издание), а также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2.

Формулу (4.105′) можно также написать в виде

$$V_n^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} r^j \sum_{k=0}^{j} P_j^{(k)}(\cos\varphi)\left[A_{jk}^{(s)}\cos k\psi + B_{jk}^{(s)}\sin k\psi\right], \qquad (4.105'')$$

где «игреки» Лапласа заменены их выражениями через элементарные сферические функции.

Замечая теперь, что функция $E_n^{(s)}(\lambda)$ имеет в отношении к переменной λ порядок $n/2$, а координата λ есть величина второго порядка по отношению к радиусу-вектору r (см. (4.93)), мы найдем, что $E_n^{(s)}(\lambda)$ есть величина порядка r^n, а поэтому

$$\lim_{r\to\infty} \frac{E_n^{(s)}(\lambda)}{r^n} = 1.$$

Разделим обе части равенства (4.105′) на r^n и перейдем к пределу при $r\to\infty$. Так как всякая поверхностная сферическая функция всегда имеет конечное значение, то найдем в пределе

$$E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu) = Y_n^{(s)}(\varphi, \psi), \qquad (4.106)$$

или

$$E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\varphi)\left[A_{nk}^{(s)}\cos k\psi + B_{nk}^{(s)}\sin k\psi\right], \qquad (4.106')$$

т. е. двойное произведение Ламе есть сферическая функция n-го порядка.

Заметим, что в силу свойства ортогональности сферических функций мы имеем

$$\iint_{(\Omega)} Y_n^{(s)}(\varphi, \psi)\,Y_m^{(\sigma)}(\varphi, \psi)\,d\omega = 0 \qquad (m \neq n),$$

где интеграл взят по всей сфере единичного радиуса. В силу формулы (4.106) мы можем теперь написать также

$$\iint_{(\Omega)} E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu)\,E_m^{(\sigma)}(\mu)\,E_m^{(\sigma)}(\nu)\,d\omega = 0 \qquad (m \neq n), \qquad (4.107)$$

причем интеграл также берется по сфере Ω. Перенося в формуле (4.107) интегрирование с поверхности сферы единичного радиуса на поверхность эллипсоида (E), имеющего общий центр с Ω, мы получим

$$\iint_{(E)} E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu)\,E_m^{(\sigma)}(\mu)\,E_m^{(\sigma)}(\nu)\cdot p\,d\sigma = 0, \qquad (4.107')$$

где p обозначает длину перпендикуляра, опущенного из центра на плоскость, касательную к элементу $d\sigma$ поверхности эллипсоида.

2. Так как сферическая функция n-го порядка также получается из гармонического многочлена, то всякая такая функция (объемная!) должна выражаться линейно через тройные произведения Ламе и мы имеем

$$r^n Y_n(\varphi, \psi) = \sum_{s=1}^{2n+1} \alpha_n^{(s)} E_n^{(s)}(\lambda) E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu).$$

Разделив обе части этого равенства опять на r^n и переходя к пределу при $r \to \infty$, мы получим

$$Y_n(\varphi, \psi) = \sum_{s=1}^{2n+1} \alpha_n^{(s)} E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu). \tag{4.108}$$

Таким образом, всякая сферическая функция n-го порядка выражается линейно через $2n+1$ произведений функций Ламе от переменных μ и ν, связанных с полярными сферическими координатами формулами (см. (4.92) и (4.94))

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi\cos\psi &= \sqrt{\frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}, \\ \sin\varphi\sin\psi &= \sqrt{\frac{(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}, \\ \cos\varphi &= \sqrt{\frac{(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.109}$$

Поэтому всякая функция, которую можно разложить в ряд по сферическим функциям, выражается также рядом произведений функций Ламе.

Приведем без вывода выражение такого рода для функции $P_n(\cos\gamma)$, где

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi - \psi').$$

Так как функция $P_n(\cos\gamma)$ симметрична относительно двух пар сферических координат, то она также будет симметрична и относительно двух пар эллипсоидальных координат и мы имеем в результате следующее выражение:

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=1}^{2n+1} E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu) E_n^{(s)}(\mu') E_n^{(s)}(\nu'). \tag{4.110}$$

Этим мы и закончим краткое изложение элементов теории эллипсоидальных функций.