ГЛАВА V

РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Разложение силовой функции произвольного притягивающего тела по сферическим функциям

1. Рассмотрим некоторое тело T (одномерное, двумерное или трехмерное), неподвижное относительно выбранной декартовой системы координат $Oxyz$.

Пусть $M(x', y', z')$ есть любая (текущая) точка тела, в которой сосредоточена элементарная притягивающая масса dm.

Если $\delta(M) = \delta(x', y', z')$ есть заданная плотность тела, которую будем считать непрерывной (или хотя бы интегрируемой) функцией от координат x', y', z' текущей точки M, то

$$dm = \delta(M)\, dT,$$

где dT обозначает пространственный элемент, представляющий собой либо элемент линии (для одномерного тела), либо элемент площади поверхности (для двумерного тела), либо элемент объема (для трехмерного тела).

Пусть, далее, $P(x, y, z)$ есть произвольная точка пространства, в которой сосредоточена единичная притягивающая масса.

Тогда притяжение, оказываемое телом T на точку P, полностью определяется заданием силовой функции $U(P)$ по формуле

$$U(x, y, z) = f \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{5.1}$$

где

$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \tag{5.2}$$

и интеграл распространен на всю притягивающую массу тела T, являясь обыкновенным криволинейным интегралом для одномерного тела, двойным поверхностным для двумерного тела и тройным объемным для трехмерного тела.

Переходя к полярным сферическим координатам r, θ, λ, имеем

$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\lambda, & y&=r\sin\theta\sin\lambda, & z&=r\cos\theta,\\ x'&=r'\sin\theta'\cos\lambda', & y'&=r'\sin\theta'\sin\lambda', & z'&=r'\cos\theta', \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

а поэтому

$$\Delta=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}, \tag{5.2'}$$

где γ есть угол, сбразованный радиусами-векторами точек M и M', причем очевидно, что

$$\begin{aligned}\cos\gamma&=\frac{x}{r}\frac{x'}{r'}+\frac{y}{r}\frac{y'}{r'}+\frac{z}{r}\frac{z'}{r'}=\\ &=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda'). \end{aligned}\tag{5.4}$$

Имея теперь в виду формулу для производящей функции многочленов Лежандра (см. формулу (4.31) гл. IV), мы можем написать следующие разложения:

для $r>r'$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}&=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\gamma+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}=\\ &=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma), \end{aligned}\tag{5.5}$$

и для $r<r'$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}&=\frac{1}{r'}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{r'}\cos\gamma+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}}=\\ &=\frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r'^{n+1}}P_n(\cos\gamma), \end{aligned}\tag{5.6}$$

причем каждый из двух этих рядов сходится абсолютно для любого значения угла γ $(0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$.

Нетрудно также установить область, в которой каждый из этих рядов сходится не только абсолютно, но и равномерно, и оценить величину остаточного члена.

Действительно, если имеем

$$\frac{r'}{r}<q<1,$$

то ряд (5.5) сходится равномерно, а его остаточный член

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_m| < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q^n}{r} = \frac{q^m}{r(1-q)},$$

поскольку, как показано в предыдущей главе, $|P_n(\cos\gamma)| < 1$.

Также, если

$$\frac{r}{r'} < q' < 1,$$

то ряд (5.6) сходится равномерно, а для его остаточного члена

$$R'_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

получаем неравенство

$$|R'_m| < \frac{q'^m}{r'(1-q')}.$$

2. Допустим теперь, что система координат выбрана так, что для данной точки $P(x, y, z)$ мы имеем $r > r'$.

Тогда имеет место разложение (5.5), а подставляя это разложение в формулу (5.1) и интегрируя почленно, что возможно при условии равномерной сходимости ряда, мы получим соответствующее разложение силовой функции $U(P)$ в полярных координатах в виде

$$U(r, \theta, \lambda) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm. \tag{5.7}$$

Так как по формуле сложения

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos\theta) P_n^{(k)}(\cos\theta') \cos k(\lambda - \lambda') \tag{5.8}$$

является сферической функцией n-го порядка относительно координат θ и λ, то, интегрируя выражение $r'^n P_n(\cos\gamma)$ по переменным r', θ', λ', мы опять получим некоторую сферическую функцию того же порядка n.

Полагая для сокращения

$$Y_n(\theta, \lambda) = \int_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm, \tag{5.9}$$

мы получим разложение силовой функции в виде

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n(\theta,\ \lambda)}{r^{n+1}}. \tag{5.10}$$

Сферические функции $Y_n(\theta,\ \lambda)$, входящие в это разложение, можно представить в явном виде, заменяя в формуле (5.9) многочлен Лежандра $P_n(\cos\gamma)$ его выражением (5.8). Тогда получим

$$Y_n(\theta,\ \lambda)=\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda\right], \tag{5.11}$$

где

$$A_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)}r'^nP_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda'\,dm \tag{5.12}$$

и

$$B_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)}r'^nP_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda'\,dm \tag{5.13}$$

суть постоянные, зависящие от формы тела T, его положения в пространстве относительно системы $Oxyz$ и от его структуры, т. е. от распределения материи, составляющей тело.

Обратимся далее к случаю, когда $r<r'$. Тогда имеем разложение (5.6), а подставляя его в формулу (5.1) и интегрируя, мы получим другое разложение силовой функции в виде

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\sum_{n=0}^{\infty}r^n\int\limits_{(T)}\frac{P_n(\cos\gamma)\,dm}{r'^{n+1}}, \tag{5.14}$$

или, полагая

$$\tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda)=\int\limits_{(T)}\frac{P_n(\cos\gamma)\,dm}{r'^{n+1}}, \tag{5.15}$$

в следующем виде:

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\sum_{n=0}^{\infty}r^n\tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda). \tag{5.16}$$

Здесь $\tilde{Y}_n$ также суть сферические функции, которые определяются следующей формулой:

$$\tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda)=\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[\tilde{A}_{nk}\cos k\lambda+\tilde{B}_{nk}\sin k\lambda\right], \tag{5.17}$$

где коэффициенты $\tilde{A}_{nk}$ и $\tilde{B}_{nk}$, подобно коэффициентам A_{nk} и B_{nk}, выражаются формулами

$$\tilde{A}_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)}P_n^{(k)}(\cos\theta')\frac{\cos k\lambda'}{r'^{n+1}}\,dm, \tag{5.18}$$

и

$$\tilde{B}_{nk} = \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int\limits_{(T)} P_n^{(k)}(\cos k\theta') \frac{\sin k\lambda'}{r'^{n+1}} dm. \qquad (5.19)$$

Эти коэффициенты также зависят от формы тела, его положения и от его структуры.

Формулы (5.10) и (5.15) дают выражения для силовой функции тела T в полярных сферических координатах в виде бесконечных рядов сферических функций, области сходимости которых в общем случае могут быть установлены лишь довольно грубо.

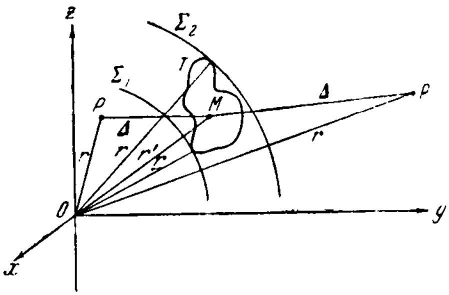

Рис. 28.

Действительно, пусть существует такая положительная постоянная, что для всех точек тела $\bar{r}$ будет выполняться неравенство $r' \leqslant \bar{r}$. Тогда ряд (5.10) заведомо будет сходящимся абсолютно и равномерно во всех точках пространства, внешних по отношению к сфере Σ_2 радиуса $\bar{r}$ с центром в начале координат (рис. 28).

Представляя формулу (5.10) в виде

$$U(P) = f \sum_{n=0}^{N} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} + U_N(P), \qquad (5.10')$$

мы можем теперь оценить остаточный член

$$U_N(P) = f \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm$$

подобно тому как это было сделано для остаточного члена ряда (5.5) при помощи легко выводимого неравенства

$$|U_N(P)| < \frac{fm}{r - \bar{r}} \left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^N,$$

где m есть полная масса тела T.

Также, если существует такая положительная постоянная $\underline{r}$, что для всех точек тела T выполняется неравенство $\underline{r} \leqslant r'$, то ряд (5.16) будет сходиться абсолютно и равномерно во всех точках пространства, лежащих внутри сферы Σ_1 радиуса $\underline{r}$ с центром в начале (см. рис. 28).

Представляя формулу (5.16) в виде

$$U(P)=f\sum_{n=0}^{N} r^n\tilde{Y}_n(\theta,\lambda)+\tilde{U}_N(P), \tag{5.16'}$$

мы получим, так же как и выше, для остаточного члена

$$\tilde{U}_N(P)=f\sum_{n=N}^{\infty} r^n\int\limits_{(T)}\frac{P_n(\cos\gamma)\,dm}{r'^{n+1}}$$

следующее неравенство:

$$|\tilde{U}_N(P)|<\frac{fm}{\underline{r}-r}\left(\frac{r}{\underline{r}}\right)^N.$$

Таким образом, области сходимости рядов (5.10) и (5.16) зависят от положения тела в пространстве или, что то же, от выбора системы координат *Oxyz*.

Если за начало координат принята какая-либо точка самого тела T (которое будем считать сплошным), то для силовой функции мы будем иметь только разложение типа (5.10), абсолютно сходящееся во всех точках пространства, лежащих вне сферы Σ радиуса $\bar{r}$ с центром в начале координат (рис. 29).

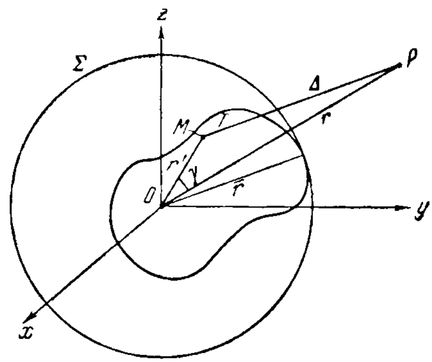

Рис. 29.

Заметим, что для области, заключенной между сферами Σ_1 и Σ_2, изображенными на рис. 28, и для области, заключенной между поверхностью тела и сферой Σ на рис. 29, полученные разложения вообще непригодны. Эти разложения непригодны и для того случая, когда точка P находится внутри тела T, составляя часть его массы.

Для всех этих исключительных областей необходимы дополнительные исследования и получение разложений иного типа.

3. Зная разложение силовой функции, можно найти путем обычного почленного дифференцирования соответствующие разложения ее частных производных по сферическим координатам r, λ, θ, что даст составляющие силы притяжения, действующей на точку P, определяемые формулами (1.13) гл. I, т. е. составляющие

$$F_r=\frac{\partial U}{\partial r},\quad F_T=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\lambda},\quad F_W=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}.$$

Разложения частных производных напишутся, как легко видеть, следующим образом. Для случая, когда точка P находится вне сферы Σ_2, или сферы Σ, т. е. для случая формулы (5.10), мы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+2}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \frac{\partial Y_n(\theta, \lambda)}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \frac{\partial Y_n(\theta, \lambda)}{\partial \theta},$$

причем

$$\frac{\partial Y_n(\theta, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{k=0}^{n} k P_n^{(k)}(\cos\theta) \left[-A_{nk} \sin k\lambda + B_{nk} \cos k\lambda\right],$$

и

$$\frac{\partial Y_n(\theta, \lambda)}{\partial \theta} = -f \sum_{k=0}^{n} \sin\theta \frac{dP_n^{(k)}(\nu)}{d\nu} \left[A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda\right],$$

а производная от присоединенной функции Лежандра найдется по формуле

$$\frac{dP_n^{(k)}(\nu)}{d\nu} = -\frac{k}{\sin^2\theta} P_n^{(k)}(\cos\theta) + \frac{1}{\sin\theta} P_n^{(k+1)}(\cos\theta).$$

Для случая, когда точка P находится внутри сферы Σ_1, т. е. для случая формулы (5.16), имеем аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial r} = f \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \tilde{Y}_n(\theta, \lambda),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = f \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{\partial \tilde{Y}_n(\theta, \lambda)}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = f \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{\partial \tilde{Y}_n(\theta, \lambda)}{\partial \theta}.$$

Производные от сферической функции $\tilde{Y}_n$ имеют совершенно такой же вид, как и производные от Y_n, нужно только постоянные A_{nk} и B_{nk} заменить на $\tilde{A}_{nk}$ и $\tilde{B}_{nk}$.