§ 2. Разложение силовой функции по гармоническим многочленам

1. В приложениях теории притяжения так же часто пользуются прямоугольными декартовскими координатами, как и сферическими. Поэтому нужно иметь разложения силовой функции и ее производных в координатах x, y, z..

Чтобы найти такое разложение, заметим, что по формуле (4.6) гл. IV каждой сферической функции n-го порядка соответствует некоторый однородный гармонический многочлен n-й степени, так что мы имеем

$$Y_n(\theta, \lambda) = \frac{1}{r^n} U_n(x, y, z).$$

Подставляя это выражение для Y_n в формулу (5.10), мы получим для силовой функции $U(P)$ следующее разложение:

$$U(x, y, z) = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}, \tag{5.20}$$

сходящееся абсолютно и равномерно во всяком случае в области, определяемой неравенством $r > \bar{r}$, т. е. вне сферы Σ_2 (или сферы Σ).

Сферической функции $\tilde{Y}_n$, входящей в формулу (5.16), соответствует также некоторый другой однородный гармонический многочлен, который обозначим через $\tilde{U}_n$, так что имеем

$$r^n \tilde{Y}_n(\theta, \lambda) = \tilde{U}_n(x, y, z).$$

Подставляя это выражение в формулу (5.16), получим другое разложение силовой функции

$$U(x, y, z) = f\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_n(x, y, z), \tag{5.21}$$

сходящееся абсолютно и равномерно во всяком случае в области, определяемой неравенством $r<\underline{r}$, т. е. внутри сферы Σ_1 *).

Многочлены U_n и $\tilde{U}_n$ можно найти различными способами. Например, можно исходить из выражений для Y_n и $\tilde{Y}_n$, даваемых формулами (5.11) и (5.17), и выразить в этих формулах синусы и косинусы от θ и λ через прямоугольные координаты

---

*) Области сходимости рядов (5.20) и (5.21), так же как и области сходимости рядов (5.10) и (5.16), в отдельных случаях могут оказаться более широкими, но для установления этого всегда нужны дополнительные исследования.

x, y, z по формулам преобразования координат, т. е. по формулам

$$\cos\theta = \frac{z}{r}, \qquad \cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}, \qquad \sin\lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Можно поступить и иначе, более непосредственным путем. Действительно, рассмотрим выражение $P_n(\cos\gamma)$, входящее в формулы (5.9) и (5.15), которое есть многочлен Лежандра n-го порядка относительно $\cos\gamma$. Поэтому по формуле (4.29) гл. IV можем написать

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}\cos^{n-2s}\gamma;$$

заменяя здесь $\cos\gamma$ его выражением (5.4) через координаты точек P и M и умножая обе части равенства на $(rr')^n$, получим

$$(rr')^n P_n(\cos\gamma) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}(xx'+yy'+zz')^{n-2s} r^{2s}r'^{2s}. \quad (5.22)$$

Каждый член последней суммы есть, очевидно, однородный многочлен n-й степени как относительно координат точки P, так и относительно координат точки M.

Следовательно, и вся сумма также есть многочлен такого же рода, и мы можем написать

$$r^n r'^n P_n(\cos\gamma) = \overline{P}_n(P, M) = \sum P_n^{(k_1, k_2, k_3)}(x', y', z')\, x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}, \quad (5.22')$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные числа k_1, k_2, k_3, удовлетворяющие условию $k_1+k_2+k_3=n$, а каждый коэффициент есть целый однородный многочлен n-й степени относительно координат x', y', z'.

Эти многочлены можно представить в виде

$$P_n^{(k_1, k_2, k_3)}(x', y', z') = \sum P_{n, k_1', k_2', k_3'}^{(k_1, k_2, k_3)} x'^{k_1'} y'^{k_2'} z'^{k_3'}, \quad (5.23)$$

где все $P_{n, \ldots}^{(\ldots)}$ суть числовые коэффициенты и сумма распространяется на все целые неотрицательные числа k_1', k_2', k_3', удовлетворяющие условию $k_1'+k_2'+k_3'=n$.

2. Теперь формула (5.9) дает

$$Y_n(\theta, \lambda) = \int_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm = \frac{1}{r^n}\int_{(T)} \overline{P}_n(P, M)\, dm = \frac{1}{r^n} U_n(x, y, z),$$

и многочлены U_n полностью определяются, так как

$$U_n(x, y, z) = \int\limits_{(T)} \overline{P}_n(P, M)\,dm. \tag{5.24}$$

Эти многочлены мы можем представить в следующем виде:

$$U_n(x, y, z) = \sum U_n^{(k_1, k_2, k_3)} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} \tag{5.24'}$$

с тем же способом суммирования, что и выше, причем коэффициенты определяются формулами

$$U_n^{(k_1, k_2, k_3)} = \int\limits_{(T)} P_n^{(k_1, k_2, k_3)}(x', y', z')\,dm \tag{5.25}$$

и зависят исключительно от формы, структуры и расположения тела T относительно осей $Oxyz$.

Заметим, что так как U_n есть гармонический многочлен, то общее число различных его коэффициентов равно $2n+1$, т. е. их столько же, сколько имеется коэффициентов A_{nk} и B_{nk}.

Имея в виду формулу (5.23), мы получим для коэффициентов многочлена $U_n(x, y, z)$ следующее выражение:

$$U_n^{(k_1', k_2', k_3')} = \sum P^{(k_1, k_2, k_3)}_{n, k_1', k_2', k_3'} I_n^{(k_1', k_2', k_3')}, \tag{5.25'}$$

где положено

$$I_n^{(k_1', k_2', k_3')} = \int\limits_{(T)} \delta(x', y', z')\, x'^{k_1'} y'^{k_2'} z'^{k_3'}\,dT. \tag{5.25''}$$

Величины $I_n^{(k_1', k_2', k_3')}$ являются характеристическими постоянными для тела T, число которых равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ для каждого значения n. Эти величины называются, вообще, **моментами инерции** n**-го порядка** тела T. Обычные моменты инерции второго порядка тела T относительно начала, координатных осей и координатных плоскостей легко выражаются через величины $I_2^{(k_1', k_2', k_3')}$. В самом деле, нетрудно видеть, что мы имеем

$$I_0 = \int\limits_{(T)} (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dm = I_2^{(2, 0, 0)} + I_2^{(0, 2, 0)} + I_2^{(0, 0, 2)},$$

$$A = \int\limits_{(T)} (y'^2 + z'^2)\,dm = I_2^{(0, 2, 0)} + I_2^{(0, 0, 2)},$$

$$B = \int\limits_{(T)} (x'^2 + z'^2)\,dm = I_2^{(2, 0, 0)} + I_2^{(0, 0, 2)},$$

$$C=\int\limits_{(T)}(x'^2+y'^2)\,dm=I_2^{(2,\,0,\,0)}+I_2^{(0,\,2,\,0)},$$

$$D=\int\limits_{(T)}x'y'\,dm=I_2^{(1,\,1,\,0)},$$

$$E=\int\limits_{(T)}x'z'\,dm=I_2^{(1,\,0,\,1)},$$

$$F=\int\limits_{(T)}y'z'\,dm=I_2^{(0,\,1,\,1)}.$$

Моменты D, E, F называются также *центробежными моментами* или *произведениями инерции*.

Обращаясь затем к формуле (5.15), получаем

$$r^n\tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda)=\int\limits_{(T)}\frac{r^nP_n(\cos\gamma)\,dm}{r'^{n+1}}=\int\limits_{(T)}\frac{\overline{P}_n(P,\ M)\,dm}{r'^{2n+1}}=\tilde{U}_n(x,\ y,\ z),$$

откуда с помощью (5.22′) найдем следующее выражение для многочлена $\tilde{U}_n(x,\ y,\ z)$:

$$\tilde{U}_n(x,\ y,\ z)=\sum\tilde{U}_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)}x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}, \qquad (5.26)$$

с тем же способом суммирования, что и выше. Так как $\tilde{U}_n(x, y, z)$ также есть гармонический многочлен, то число независимых его коэффициентов равно $2n+1$ и эти коэффициенты определяются формулой

$$\tilde{U}_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)}=\int\limits_{(T)}\frac{P_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)}(x',\ y',\ z')\,dm}{r'^{2n+1}}, \qquad (5.26')$$

т. е. зависят исключительно от формы, структуры и расположения тела T относительно осей $Oxyz$.

При помощи формулы (5.23) мы получаем следующие выражения для коэффициентов $\tilde{U}_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)}$:

$$\tilde{U}_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)}=\sum P_{n,\,k'_1,\,k'_2,\,k'_3}^{(k_1,\,k_2,\,k_3)}\tilde{I}_n^{(k'_1,\,k'_2,\,k'_3)}, \qquad (5.26'')$$

где положено, аналогично предыдущему,

$$\tilde{I}_n^{(k'_1,\,k'_2,\,k'_3)}=\int\limits_{(T)}\frac{\delta(x',\ y',\ z')}{r'^{2n+1}}x'^{k'_1}y'^{k'_2}z'^{k'_3}\,dT.$$

Эти величины, для которых нет особого названия, могут быть выражены через моменты инерции (5.25″), которые полностью характеризуют тело T, так что два разных тела отличаются друг от друга числовыми значениями моментов инерции, и наоборот, если заданы две системы чисел (5.25″), то они соответствуют, вообще, двум различным телам.

3. Мы уже отмечали, что коэффициенты $I_n^{(\dots)}$ и $\tilde{I}_n^{(\dots)}$ зависят не только от формы и структуры тела T, но и от его расположения и ориентации относительно системы осей $Oxyz$.

Так как зависимость этих коэффициентов от системы координат является в известной мере случайной и не влияющей на физическую природу тела, то наиболее удобно относить все эти величины к собственной системе координат, неизменно связанной с телом, например к системе, начало которой совпадает с центром масс тела, а оси — с главными осями инерции.

Характеристические постоянные, вычисленные для этой системы координат, можно назвать главными или основными моментами инерции тела T. Очевидно, что значения этих постоянных в любой другой системе координат могут быть выведены из главных моментов инерции с помощью общих формул преобразования координат в пространстве.

Возвращаясь теперь к разложениям (5.20) и (5.21) силовой функции тела T, найдем при помощи дифференцирований этих разложений соответствующие разложения для прямоугольных составляющих силы притяжения тела T, действующей на материальную точку P единичной массы.

Нетрудно видеть, что для случая $r>\bar{r}$, т. е. когда точка P находится вне сферы Σ_2 (или сферы Σ), мы получаем, дифференцируя (5.20) по x, y, z:

$$\left.\begin{aligned}
X(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \\
Y(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \\
Z(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(x, y, z)}{r^{2n+3}},
\end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

где X_n, Y_n, Z_n суть однородные многочлены $(n+1)$-й степени, определяемые формулами

$$\begin{aligned}
X_n(x, y, z) &= r^2 \frac{\partial U_n}{\partial x} - (2n+1)\, xU_n, \\
Y_n(x, y, z) &= r^2 \frac{\partial U_n}{\partial y} - (2n+1)\, yU_n, \\
Z_n(x, y, z) &= r^2 \frac{\partial U_n}{\partial z} - (2n+1)\, zU_n.
\end{aligned}$$

Для случая, когда $r<\underline{r}$, т. е. когда точка P находится внутри сферы Σ_1, мы имеем, дифференцируя таким же образом выражение (5.21):

$$\left.\begin{aligned}
X(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{X}_n(x, y, z), \\
Y(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n(x, y, z), \\
Z(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Z}_n(x, y, z),
\end{aligned}\right\} \qquad (5.28)$$

где $\tilde{X}_n$, $\tilde{Y}_n$, $\tilde{Z}_n$ суть, очевидно, некоторые многочлены $(n-1)$-й степени, тоже однородные.

§ 3. Первые члены разложения силовой функции

1. Разложения, полученные в предыдущих параграфах, имеют совершенно общий характер, т. е. дают общее выражение для силовой функции произвольного притягивающего тела в виде некоторого бесконечного ряда, структура общего члена которого установлена приведенными выше формулами.

Однако в практических приложениях обыкновенно используются только несколько первых членов подобных рядов, а поэтому полезно привести формулы, дающие развернутые выражения этих первых членов. Мы ограничимся выписыванием только первых пяти членов, т. е. найдем выражения сферических функций или гармонических многочленов для $n=0$, 1, 2, 3, 4.

Прежде всего составим для этих значений n многочлены $\bar{P}_n(P, M)$, определяемые формулами (5.22) и (5.22′).

Прежде всего, имеем

$$\bar{P}_0(P, M) = P_0(\cos\gamma) = 1. \qquad (5.29)$$

Далее, так же просто получаем

$$\bar{P}_1(P, M) = rr'P_1(\cos\gamma) = rr'\cos\gamma = xx' + yy' + zz'. \qquad (5.30)$$

Полагая теперь $n=2$, находим

$$\bar{P}_2(P, M) = r^2r'^2P_2(\cos\gamma) = r^2r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$\bar{P}_2(P, M) = \frac{3}{2}(xx' + yy' + zz')^2 - \frac{1}{2}r'^2(x^2 + y^2 + z^2),$$