Для случая, когда $r<\underline{r}$, т. е. когда точка P находится внутри сферы Σ_1, мы имеем, дифференцируя таким же образом выражение (5.21):

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{X}_n(x, y, z), \\ Y(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n(x, y, z), \\ Z(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Z}_n(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

где $\tilde{X}_n$, $\tilde{Y}_n$, $\tilde{Z}_n$ суть, очевидно, некоторые многочлены $(n-1)$-й степени, тоже однородные.

§ 3. Первые члены разложения силовой функции

1. Разложения, полученные в предыдущих параграфах, имеют совершенно общий характер, т. е. дают общее выражение для силовой функции произвольного притягивающего тела в виде некоторого бесконечного ряда, структура общего члена которого установлена приведенными выше формулами.

Однако в практических приложениях обыкновенно используются только несколько первых членов подобных рядов, а поэтому полезно привести формулы, дающие развернутые выражения этих первых членов. Мы ограничимся выписыванием только первых пяти членов, т. е. найдем выражения сферических функций или гармонических многочленов для $n=0, 1, 2, 3, 4$.

Прежде всего составим для этих значений n многочлены $\bar{P}_n(P, M)$, определяемые формулами (5.22) и (5.22′).

Прежде всего, имеем

$$\bar{P}_0(P, M) = P_0(\cos\gamma) = 1. \tag{5.29}$$

Далее, так же просто получаем

$$\bar{P}_1(P, M) = rr'P_1(\cos\gamma) = rr'\cos\gamma = xx' + yy' + zz'. \tag{5.30}$$

Полагая теперь $n=2$, находим

$$\bar{P}_2(P, M) = r^2r'^2P_2(\cos\gamma) = r^2r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$\bar{P}_2(P, M) = \frac{3}{2}(xx' + yy' + zz')^2 - \frac{1}{2}r'^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

или, в развернутом виде,

$$P_2(P,\ M)=\frac{x^2}{2}\left(3x'^2-r'^2\right)+\frac{y^2}{2}\left(3y'^2-r'^2\right)+$$
$$+\frac{z^2}{2}\left(3z'^2-r'^2\right)+3xy\cdot x'y'+3xz\cdot x'z'+3yz\cdot y'z'. \quad (5.31)$$

Затем, для $n=3$ имеем

$$\overline{P}_3(P,M)=r^3r'^3P_3(\cos\gamma)=r^3r'^3\left(\frac{5}{2}\cos^3\gamma-\frac{3}{2}\cos\gamma\right)=$$
$$=\frac{5}{2}(rr'\cos\gamma)^3-\frac{3}{2}(rr'\cos\gamma)\,r^2r'^2,$$

или

$$\overline{P}_3(P,\ M)=\frac{5}{2}(xx'+yy'+zz')^3-$$
$$-\frac{3}{2}r'^3(xx'+yy'+zz')(x^2+y^2+z^2),$$

а в развернутом виде

$$\overline{P}_3(P,\ M)=x^3\left(\frac{5}{2}x'^3-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+x^2y\left(\frac{15}{2}y'x'^2-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+$$
$$+x^2z\left(\frac{15}{2}z'x'^2-\frac{3}{2}z'r'^2\right)+xy^2\left(\frac{15}{2}x'y'^2-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+$$
$$+15xyz\cdot x'y'z'+xz^2\left(\frac{15}{2}x'z'^2-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+$$
$$+y^3\left(\frac{5}{2}y'^3-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+y^2z\left(\frac{15}{2}z'y'^2-\frac{3}{2}z'r'^2\right)+$$
$$+yz^2\left(\frac{15}{2}y'z'^2-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+z^3\left(\frac{5}{2}z'^3-\frac{3}{2}z'r'^2\right). \quad (5.32)$$

Наконец, для $n=4$ находим

$$\overline{P}_4(P,\ M)=r^4r'^4P_4(\cos\gamma)=r^4r'^4\left(\frac{35}{8}\cos^4\gamma-\frac{30}{8}\cos^2\gamma+\frac{3}{8}\right)=$$
$$=\frac{35}{8}(rr'\cos\gamma)^4-\frac{30}{8}(rr'\cos\gamma)^2r^2r'^2+\frac{3}{8}r^4r'^4,$$

или

$$\overline{P}_4(P,\ M)=\frac{35}{8}(xx'+yy'+zz')^4-$$
$$-\frac{30}{8}(xx'+yy'+zz')^2(x^2+y^2+z^2)\,r'^2+\frac{3}{8}(x^2+y^2+z^2)^2\cdot r'^4,$$

а в развернутом виде имеем

$$\begin{aligned}\overline{P}_4(P,\ M) = {} & x^4\left(\frac{35}{8}x'^4-\frac{30}{8}x'^2r'^2+\frac{3}{8}r'^4\right)+\\ &+x^3y\left(\frac{35}{2}x'^3y'-\frac{15}{2}x'y'r'^2\right)+x^3z\left(\frac{35}{2}x'^3z'-\frac{15}{2}x'z'r'^2\right)+\\ &+x^2y^2\left(\frac{105}{4}x'^2y'^2-\frac{15}{4}x'^2r'^2-\frac{15}{4}y'^2r'^2+\frac{3}{4}r'^4\right)+\\ &+x^2z^2\left(\frac{105}{4}x'^2z'^2-\frac{15}{4}x'^2r'^2-\frac{15}{4}z'^2r'^2+\frac{3}{4}r'^4\right)+\\ &+x^2yz\left(\frac{105}{2}x'^2y'z'-\frac{30}{4}y'z'r'^2\right)+xy^3\left(\frac{35}{2}x'y'^3-\frac{30}{4}x'y'r'^2\right)+\\ &+xy^2z\left(\frac{105}{2}x'y'^2z'-\frac{30}{4}x'z'r'^2\right)+xyz^2\left(\frac{105}{2}x'y'z'^2-\frac{30}{4}x'y'r'^2\right)+\\ &+xz^3\left(\frac{35}{2}x'z'^3-\frac{30}{4}x'z'r'^2\right)+y^4\left(\frac{35}{8}y'^4-\frac{30}{8}y'^2r'^2+\frac{3}{8}r'^4\right)+\\ &+y^3z\left(\frac{35}{2}y'^3z'-\frac{30}{4}y'z'r'^2\right)+\\ &+y^2z^2\left(\frac{105}{4}y'^2z'^2-\frac{30}{8}z'^2r'^2-\frac{30}{8}y'^2r'^2+\frac{3}{4}r'^4\right)+\\ &+yz^3\left(\frac{35}{2}y'z'^3-\frac{30}{4}y'z'r'^2\right)+z^4\left(\frac{35}{8}z'^4-\frac{30}{8}z'^2r'^2+\frac{3}{8}r'^4\right).\end{aligned} \tag{5.33}$$

2. Переходим теперь к вычислению многочленов U_n и $\overline{U}_n$. Так как

$$U_n(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(T)}\overline{P}_n(P,\ M)\,dm, \tag{5.24}$$

то, полагая здесь последовательно $n=0$, 1, 2, 3, 4 и имея в виду формулы (5.29) — (5.33), мы найдем

$$U_0(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(T)}dm=m, \tag{5.34}$$

где m — полная масса притягивающего тела.

Далее,

$$U_1(x,\ y,\ z)=x\int\limits_{(T)}x'\,dm+y\int\limits_{(T)}y'\,dm+z\int\limits_{(T)}z'\,dm=$$
$$=m(x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z}), \tag{5.35}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ обозначают координаты центра инерции (центра масс) притягивающего тела T в системе координат $Oxyz$, выбранной совершенно произвольно. Если, в частности, система координат выбрана так, что начало O помещено в центре инерции тела, то $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$ и формула (5.35) показывает, что в этом случае $U_1(x, y, z)\equiv 0$.

Для $n=2$ находим

$$U_2(x, y, z)=\frac{x^2}{2}\int\limits_{(T)}(3x'^2-r'^2)\,dm+\frac{y^2}{2}\int\limits_{(T)}(3y'^2-r'^2)\,dm+$$
$$+\frac{z^2}{2}\int\limits_{(T)}(3z'^2-r'^2)\,dm+3xy\int\limits_{(T)}x'y'\,dm+$$
$$+3xz\int\limits_{(T)}x'z'\,dm+3yz\int\limits_{(T)}y'z'\,dm.$$

Используя здесь выражения для моментов инерции второго порядка, приведенные выше, мы напишем выражение для U_2 в виде

$$U_2(x, y, z)=\frac{1}{2}(B+C-2A)\,x^2+\frac{1}{2}(C+A-2B)\,y^2+$$
$$+\frac{1}{2}(A+B-2C)\,z^2+3Dxy+3Exz+3Fyz. \quad (5.36)$$

Заметим, что U_2 есть гармонический многочлен второго порядка и число независимых его коэффициентов должно быть равно пяти. И в самом деле, легко видеть, что сумма коэффициентов при квадратах координат равна нулю, т. е. два из них выражаются через третий. Принимая, например, за независимые коэффициенты первые два и последние три, мы можем написать выражение для U_2 также в следующем виде:

$$U_2(x, y, z)=\frac{1}{2}(B+C-2A)(x^2-z^2)+$$
$$+\frac{1}{2}(C+A-2B)(y^2-z^2)+3Dxy+3Exz+3Fyz. \quad (5.36')$$

Многочлен U_2 можно представить еще в другом, более удобном для приложений виде, а именно:

$$U_2(x, y, z)=\frac{1}{2}r^2(A+B+C-3I), \quad (5.37)$$

где

$$I=A\left(\frac{x}{r}\right)^2+B\left(\frac{y}{r}\right)^2+C\left(\frac{z}{r}\right)^2-2D\frac{x}{r}\frac{y}{r}-2E\frac{x}{r}\frac{z}{r}-2F\frac{y}{r}\frac{z}{r} \quad (5.37')$$

есть момент инерции тела T относительно прямой OP, соединяющей начало координат с притягиваемой точкой $P(x, y, z)$.

Система координат $Oxyz$ в формулах (5.35)—(5.37') остается совершенно произвольной. Если, в частности, за направления осей координат принять направления главных осей инерции тела, то, как известно*), $D=E=F=0$, и формулы (5.36) и (5.37′) примут более простой вид:

$$U_2(x, y, z)=\frac{1}{2}(B+C-2A)x^2+$$
$$+\frac{1}{2}(C+A-2B)y^2+\frac{1}{2}(A+B-2C)z^2=$$
$$=\frac{1}{2}(B+C-2A)(x^2-z^2)+\frac{1}{2}(C+A-2B)(y^2-z^2), \quad (5.36'')$$
$$I=A\left(\frac{x}{r}\right)^2+B\left(\frac{y}{r}\right)^2+C\left(\frac{z}{r}\right)^2. \quad (5.37'')$$

3. Далее, для $n=3$ имеем

$$U_3(x, y, z)=U_3^{(3,0,0)}x^3+U_3^{(2,1,0)}x^2y+U_3^{(2,0,1)}x^2z+$$
$$+U_3^{(1,2,0)}xy^2+U_3^{(1,1,1)}xyz+U_3^{(1,0,2)}xz^2+U_3^{(0,3,0)}y^3+$$
$$+U_3^{(0,2,1)}y^2z+U_3^{(0,1,2)}yz^2+U_3^{(0,0,3)}z^3, \quad (5.38)$$

где коэффициенты, ввиду (5.32) и (5.25″), определяются следующими формулами:

$$U_3^{(3,0,0)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(5x'^2-3r'^2)x'\,dm=I_3^{(3,0,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(1,2,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(1,0,2)},$$

$$U_3^{(2,1,0)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(15x'^2-3r'^2)y'\,dm=6I_3^{(2,1,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,3,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,1,2)},$$

$$U_3^{(2,0,1)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(15x'^2-3r'^2)z'\,dm=6I_3^{(2,0,1)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,2,1)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,0,3)},$$

$$U_3^{(1,2,0)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(15y'^2-3r'^2)x'\,dm=-\frac{3}{2}I_3^{(3,0,0)}+6I_3^{(1,2,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(1,0,2)},$$

$$U_3^{(1,1,1)}=15\int\limits_{(T)}x'y'z'\,dm=15I_3^{(1,1,1)},$$

$$U_3^{(1,0,2)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(15z'^2-3r'^2)x'\,dm=-\frac{3}{2}I_3^{(3,0,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(1,2,0)}+6I_3^{(1,0,2)}$$

$$U_3^{(0,3,0)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(5y'^2-3r'^2)y'\,dm=-\frac{3}{2}I_3^{(2,1,0)}+I_3^{(0,3,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,1,2)}$$

---

*) См. любой учебник по теоретической механике, например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, или А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

$$U_3^{(0,2,1)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} (15y'^2 - 3r'^2) z'\, dm = -\frac{3}{2} I_3^{(2,0,1)} + 6 I_3^{(0,2,1)} - \frac{3}{2} I_3^{(0,0,3)},$$

$$U_3^{(0,1,2)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} (15z'^2 - 3r'^2) y'\, dm = -\frac{3}{2} I_3^{(2,1,0)} - \frac{3}{2} I_3^{(0,3,0)} + 6 I_3^{(0,1,2)},$$

$$U_3^{(0,0,3)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} (5z'^2 - 3r'^2) z'\, dm = -\frac{3}{2} I_3^{(2,0,1)} - \frac{3}{2} I_3^{(0,2,1)} + I_3^{(0,0,3)}.$$

Число независимых коэффициентов гармонического многочлена третьей степени равно $2\cdot 3+1=7$. Следовательно, 10 выписанных выражений не являются все независимыми и три из них должны выражаться через остальные семь. Нетрудно найти необходимые зависимости между этими коэффициентами:

$$3U_3^{(3,0,0)} + U_3^{(1,2,0)} + U_3^{(1,0,2)} = 0,$$
$$U_3^{(2,1,0)} + 3U_3^{(0,3,0)} + U_3^{(0,1,2)} = 0,$$
$$U_3^{(2,0,1)} + U_3^{(0,2,1)} + 3U_3^{(0,0,3)} = 0.$$

Из этих равенств можно выразить три коэффициента, например, $U_3^{(3,0,0)}$, $U_3^{(0,3,0)}$, $U_3^{(0,0,3)}$ через шесть. Седьмым независимым коэффициентом будет $U_3^{(1,1,1)}$, не входящий в эти равенства.

Окончательное выражение для U_3 можно написать, например, в следующем виде:

$$U_3(x, y, z) = U_3^{(1,2,0)}\left(xy^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + U_3^{(1,0,2)}\left(xz^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + \\ + U_3^{(2,1,0)}\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) + U_3^{(0,1,2)}\left(yz^2 - \frac{1}{3}y^3\right) + \\ + U^{(2,0,1)}\left(x^2z - \frac{1}{3}z^3\right) + U_3^{(0,2,1)}\left(y^2z - \frac{1}{3}z^3\right) + U_3^{(1,1,1)}xyz. \quad (5.38')$$

4. Наконец, для $n=4$ имеем

$$U_4(x, y, z) = U_4^{(4,0,0)}x^4 + U_4^{(3,1,0)}x^3y + U_4^{(3,0,1)}x^3z + \\ + U_4^{(2,2,0)}x^2y^2 + U_4^{(2,0,2)}x^2z^2 + U_4^{(2,1,1)}x^2yz + U_4^{(1,3,0)}xy^3 + \\ + U_4^{(1,2,1)}xy^2z + U_4^{(1,1,2)}xyz^2 + U_4^{(1,0,3)}xz^3 + U_4^{(0,4,0)}y^4 + \\ + U_4^{(0,3,1)}y^3z + U_4^{(0,2,2)}y^2z^2 + U_4^{(0,1,3)}yz^3 + U_4^{(0,0,4)}z^4, \quad (5.39)$$

где коэффициенты, ввиду (5.33), определяются формулами

$$U_4^{(4,0,0)} = \frac{1}{8}\int\limits_{(T)} (35x'^4 - 30x'^2r'^2 + 3r'^4)\, dm =$$
$$= \frac{1}{4} I_4^{(4,0,0)} - 3I_4^{(2,2,0)} - 3I_4^{(2,0,2)} + \frac{3}{4} I_4^{(0,2,2)} + \frac{3}{8} I_4^{(0,4,0)} + \frac{3}{8} I_4^{(0,0,4)},$$

$$U_4^{(3,1,0)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7x'^2 - 3r'^2)\, x'y'\, dm = 10 I_4^{(3,1,0)} - \frac{15}{2} I_4^{(1,3,0)} - \frac{15}{2} I_4^{(1,1,2)},$$

$$U_4^{(3,0,1)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7x'^2 - 3r'^2)\, x'z'\, dm = 10 I_4^{(3,0,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(1,2,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(1,0,3)},$$

$$U_4^{(2,2,0)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} (35x'^2 y'^2 - 5x'^2 r'^2 - 5y'^2 r'^2 + r'^4)\, dm =$$

$$= \frac{81}{4} I_4^{(2,2,0)} - 3 I_4^{(4,0,0)} - \frac{9}{4} I_4^{(2,0,2)} - \frac{9}{4} I_4^{(0,2,2)} + \frac{3}{4} I_4^{(0,4,0)} + \frac{3}{4} I_4^{(0,0,4)},$$

$$U_4^{(2,0,2)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} (35x'^2 z'^2 - 5x'^2 r'^2 - 5z'^2 r'^2 + r'^4)\, dm =$$

$$= \frac{81}{4} I_4^{(2,0,2)} - \frac{9}{4} I_4^{(2,2,0)} - 3 I_4^{(4,0,0)} - \frac{9}{4} I_4^{(0,2,2)} - 3 I_4^{(0,0,4)} + \frac{3}{4} I_4^{(0,4,0)},$$

$$U_4^{(2,1,1)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} (7x'^2 - r'^2)\, y'z'\, dm = 45 I_4^{(2,1,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(0,3,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(0,1,3)},$$

$$U_4^{(1,3,0)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7y'^2 - 3r'^2)\, x'y'\, dm = 10 I_4^{(1,3,0)} - \frac{15}{2} I_4^{(3,1,0)} - \frac{15}{2} I_4^{(1,1,2)},$$

$$U_3^{(1,2,1)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} (7y'^2 - r'^2)\, x'z'\, dm = 45 I_4^{(1,2,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(3,0,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(1,0,3)},$$

$$U_4^{(1,1,2)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} (7z'^2 - r'^2)\, x'y'\, dm = 45 I_4^{(1,1,2)} - \frac{15}{2} I_4^{(3,1,0)} - \frac{15}{2} I_4^{(1,3,0)},$$

$$U_4^{(1,0,3)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7z'^2 - 3r'^2)\, x'z'\, dm = 10 I_4^{(1,0,3)} - \frac{15}{2} I_4^{(1,2,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(3,0,1)},$$

$$U_4^{(0,4,0)} = \frac{1}{8} \int\limits_{(T)} (35y'^4 - 30y'^2 r'^2 + 3r'^4)\, dm =$$

$$= I_4^{(0,4,0)} - 3 I_4^{(2,2,0)} - 3 I_4^{(0,2,2)} + \frac{3}{8} I_4^{(4,0,0)} + \frac{3}{8} I_4^{(0,0,4)} + \frac{3}{8} I_4^{(2,0,2)},$$

$$U_4^{(0,3,1)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7y'^2 - 3r'^2)\, y'z'\, dm = 10 I_4^{(0,3,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(2,1,1)} - \frac{15}{2} I_4^{(0,1,3)},$$

$$U_4^{(0,2,2)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} (35y'^2 z'^2 - 5z'^2 r'^2 - 5y'^2 r'^2 + r'^4)\, dm =$$

$$= \frac{81}{4} I_4^{(0,2,2)} - \frac{3}{4} I_4^{(2,0,2)} + \frac{3}{4} I_4^{(4,0,0)} - \frac{9}{4} I_4^{(2,2,0)} - 3 I_4^{(0,0,4)} - 3 I_4^{(0,4,0)},$$

$$U_4^{(0,1,3)}=\frac{5}{2}\int\limits_{(T)}(7z'^2-3r'^2)\,y'z'\,dm=10I_4^{(0,1,3)}-\frac{15}{2}I_4^{(2,1,1)}-\frac{15}{2}I_4^{(0,3,1)},$$

$$U_4^{(0,0,4)}=\frac{1}{8}\int\limits_{(T)}(35z'^4-30z'^2r'^2+3r'^4)\,dm=$$
$$=I_4^{(0,0,4)}-3I_4^{(2,0,2)}-3I_4^{(0,2,2)}+\frac{3}{8}I_4^{(4,0,0)}+\frac{3}{8}I_4^{(0,4,0)}+\frac{3}{4}I_4^{(2,2,0)}.$$

Из этих 15 коэффициентов в силу гармоничности многочлена U_4 только $2\cdot 4+1=9$ независимы, а остальные шесть выражаются через девять независимых. Нетрудно установить, что коэффициенты многочлена U_4 связаны следующими соотношениями:

$$6U_4^{(4,0,0)}+U_4^{(2,2,0)}+U_4^{(2,0,2)}=0,\quad 3U_4^{(3,1,0)}+3U_4^{(1,3,0)}+U_4^{(1,1,2)}=0,$$
$$3U_4^{(3,0,1)}+U_4^{(1,2,1)}+3U_4^{(1,0,3)}=0,\quad U_4^{(2,2,0)}+6U_4^{(0,4,0)}+U_4^{(0,2,2)}=0,$$
$$U_4^{(2,0,2)}+U_4^{(0,2,2)}+6U_4^{(0,0,4)}=0,\quad U_4^{(2,1,1)}+3U_4^{(0,3,1)}+3U_4^{(0,1,3)}=0,$$

из которых можем выразить шесть коэффициентов через остальные.

Например, можем написать

$$U_4^{(4,0,0)}=-\frac{1}{6}U_4^{(2,2,0)}-\frac{1}{6}U_4^{(2,0,2)},\quad U_4^{(1,1,2)}=-3U_4^{(3,1,0)}-3U_4^{(1,3,0)},$$
$$U_4^{(0,4,0)}=-\frac{1}{6}U_4^{(2,2,0)}-\frac{1}{6}U_4^{(0,2,2)},\quad U_4^{(1,2,1)}=-3U_4^{(3,0,1)}-3U_4^{(1,0,3)},$$
$$U_4^{(0,0,4)}=-\frac{1}{6}U_4^{(2,0,2)}-\frac{1}{6}U_4^{(0,2,2)},\quad U_4^{(2,1,1)}=-3U_4^{(0,3,1)}-3U_4^{(0,1,3)},$$

и тогда формула (5.39) может быть представлена в виде

$$U_4(x,\ y,\ z)=U_4^{(2,2,0)}\left(x^2y^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}y^4\right)+$$
$$+U_4^{(2,0,2)}\left(x^2z^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}z^4\right)+U_4^{(0,2,2)}\left(y^2z^2-\frac{1}{6}y^4-\frac{1}{6}z^4\right)+$$
$$+U_4^{(3,1,0)}(x^3y-3xyz^2)+U_4^{(1,3,0)}(xy^3-3xyz^2)+$$
$$+U_4^{(3,0,1)}(x^3z-3xy^2z)+U_4^{(1,0,3)}(xz^3-3xy^2z)+$$
$$+U_4^{(0,3,1)}(y^3z-3x^2yz)+U_4^{(0,1,3)}(yz^3-3x^2yz).\qquad(5.39')$$

5. Вычисленные многочлены позволяют написать следующее приближенное выражение для силовой функции тела T:

$$U(x,\ y,\ z)=f\left\{\frac{m}{r}+\sum_{n=1}^{4}\frac{U_n(x,\ y,\ z)}{r^{2n+1}}+\ \dots\right\}.\qquad(5.40)$$

Если же начало координат взять в центре масс тела, а за координатные оси принять главные центральные оси инерции, то будем иметь следующее выражение:

$$U(x,y,z)=f\left\{\frac{m}{r}+\frac{A+B+C-3I}{2r^3}+\frac{U_3(x,y,z)}{r^7}+\frac{U_4(x,y,z)}{r^9}+\ldots\right\}. \tag{5.40'}$$

Заметим, что на практике большей частью можно ограничиться только двумя первыми членами ряда и писать

$$U(x,\ y,\ z)=f\left\{\frac{m}{r}+\frac{A+B+C-3I}{2r^3}+\ldots\right\}. \tag{5.40''}$$

Переходя теперь к вычислению многочленов $\tilde{U}_n$, определяемых формулой

$$\tilde{U}_n(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(T)}\frac{\tilde{P}_n(P,\ M)\,dm}{r'^{2n+1}},$$

можно заметить, что это выражение отличается от выражения (5.24) для многочленов U_n только множителем r'^{-2n-1} подынтегрального выражения. Поэтому все коэффициенты многочленов $\tilde{U}_n$ получатся введением множителя r'^{-2n-1} в подынтегральные выражения формул, определяющих коэффициенты U_n и нет нужды выписывать все эти громоздкие выражения еще раз. Разумеется, между коэффициентами гармонических многочленов $\tilde{U}_n(x,\ y,\ z)$ существуют такие же соотношения гармоничности, как и между коэффициентами многочленов $U_n(x,\ y,\ z)$.

Коэффициенты A_{nk}, B_{nk} и $\tilde{A}_{nk}$, $\tilde{B}_{nk}$ разложений (5.10) и (5.16) силовой функции по сферическим гармоникам могут быть, конечно, вычислены непосредственно по формулам (5.12), (5.13) и (5.18), (5.19), но могут быть также выражены через коэффициенты гармонических многочленов U_n и $\tilde{U}_n$.

В самом деле, сферические функции, «игреки Лапласа», получаются из гармонических многочленов путем замены прямоугольных координат через полярные сферические, по формулам (5.3), что позволяет выразить $2n+1$ независимых коэффициентов гармонического многочлена n-й степени через $2n+1$ коэффициентов сферической функции n-го порядка. Наоборот, заменяя синусы и косинусы сферических кординат в общем выражении для $Y_n(\theta,\lambda)$ их значениями в функции x, y, z, мы перейдем от сферической функции к гармоническому многочлену, что опять позволит написать соотношения между коэффициентами обеих функций.

Произведя такое вычисление для $n=0$, 1, 2, мы получим

$$A_{00}=m,\quad A_{10}=m\bar{z},\quad A_{11}=m\bar{x},\quad A_{12}=m\bar{y},$$

$$A_{20}=\frac{A+B-2C}{2},\quad A_{22}=\frac{B-A}{2},$$

$$B_{22}=\frac{1}{6}D,\quad A_{21}=\frac{1}{3}E,\quad B_{21}=\frac{1}{3}F,$$

и первые члены разложения функции U для случая $r>\bar{r}$ напишутся в виде

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\left\{\frac{m}{r}+\frac{m}{r^2}(\bar{x}\sin\theta\cos\lambda+\bar{y}\sin\theta\sin\lambda+\bar{z}\cos\theta)+\right.$$
$$+\frac{A+B-2C}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{3(B-A)}{4r^3}\sin^2\theta\cos 2\lambda+$$
$$\left.+\frac{D}{2r^3}\sin^2\theta\sin 2\lambda+\frac{E}{2r^3}\sin 2\theta\cos\lambda+\frac{F}{2r^3}\sin 2\theta\sin\lambda+\ldots\right\}. \quad (5.41)$$

Если начало системы координат $Oxyz$ взято в центре инерции тела T, то имеем более простую формулу:

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\left\{\frac{m}{r}+\frac{A+B-2C}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+\frac{3(B-A)}{4r^3}\sin^2\theta\cos 2\lambda+\ldots\right\}. \quad (5.41')$$

§ 4. Некоторые частные случаи разложения силовой функции

В предыдущих параграфах мы рассматривали задачу о разложении силовой функции притягивающего тела, форма и строение которого предполагались достаточно произвольными. Система координат, к которой относилось наше тело и притягиваемая материальная точка (единичной массы), вообще оставалась какой угодно, и лишь в одном случае мы показали, как упрощается разложение, если за систему координат принять главные центральные оси инерции притягивающего тела.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, в которых притягивающее тело обладает некоторой геометрической и динамической симметрией, вследствие чего разложение силовой функции надлежащим выбором системы координат может быть значительно упрощено.

1. Пусть тело T таково, что его форма обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, общая точка пересечения которых является тогда также центром симметрии.

Например, из тел, имеющих только одно измерение (материальная линия), такой симметрией обладают, очевидно, прямолинейный отрезок, окружность, эллипс, периметр квадрата или прямоугольника и т. д. Из тел, имеющих два измерения