Произведя такое вычисление для $n=0, 1, 2$, мы получим

$$A_{00}=m, \quad A_{10}=m\bar{z}, \quad A_{11}=m\bar{x}, \quad A_{12}=m\bar{y},$$
$$A_{20}=\frac{A+B-2C}{2}, \quad A_{22}=\frac{B-A}{2},$$
$$B_{22}=\frac{1}{6}D, \quad A_{21}=\frac{1}{3}E, \quad B_{21}=\frac{1}{3}F,$$

и первые члены разложения функции U для случая $r>\bar{r}$ напишутся в виде

$$U(r, \theta, \lambda)=f\left\{\frac{m}{r}+\frac{m}{r^2}(\bar{x}\sin\theta\cos\lambda+\bar{y}\sin\theta\sin\lambda+\bar{z}\cos\theta)+\right.$$
$$+\frac{A+B-2C}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{3(B-A)}{4r^3}\sin^2\theta\cos 2\lambda+$$
$$\left.+\frac{D}{2r^3}\sin^2\theta\sin 2\lambda+\frac{E}{2r^3}\sin 2\theta\cos\lambda+\frac{F}{2r^3}\sin 2\theta\sin\lambda+\ldots\right\}. \quad (5.41)$$

Если начало системы координат $Oxyz$ взято в центре инерции тела T, то имеем более простую формулу:

$$U(r, \theta, \lambda)=f\left\{\frac{m}{r}+\frac{A+B-2C}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+\frac{3(B-A)}{4r^3}\sin^2\theta\cos 2\lambda+\ldots\right\}. \quad (5.41')$$

§ 4. Некоторые частные случаи разложения силовой функции

В предыдущих параграфах мы рассматривали задачу о разложении силовой функции притягивающего тела, форма и строение которого предполагались достаточно произвольными. Система координат, к которой относилось наше тело и притягиваемая материальная точка (единичной массы), вообще оставалась какой угодно, и лишь в одном случае мы показали, как упрощается разложение, если за систему координат принять главные центральные оси инерции притягивающего тела.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, в которых притягивающее тело обладает некоторой геометрической и динамической симметрией, вследствие чего разложение силовой функции надлежащим выбором системы координат может быть значительно упрощено.

1. Пусть тело T таково, что его форма обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, общая точка пересечения которых является тогда также центром симметрии.

Например, из тел, имеющих только одно измерение (материальная линия), такой симметрией обладают, очевидно, прямолинейный отрезок, окружность, эллипс, периметр квадрата или прямоугольника и т. д. Из тел, имеющих два измерения (материальная поверхность), такой симметрией обладают квадрат, прямоугольник, круглый или эллиптический диск, поверхность шара или эллипсоида и т. д. Из трехмерных тел такой симметрией обладают куб, шар, эллипсоид, круглый или эллиптический цилиндр и др.

Но если тело обладает только геометрической симметрией, а распределение плотностей в нем остается произвольным, то никакого упрощения мы вообще не получим.

Поэтому допустим, что тело обладает не только геометрической, но и механической (или динамической) симметрией относительно тех же трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Иными словами, предположим, что притягивающее вещество расположено симметрично относительно этих плоскостей, что будет, например, всегда в том случае, когда тело, обладающее геометрической симметрией, вдобавок однородно. Но и неоднородные тела могут обладать динамической симметрией, примером чего может быть шар, обладающий сферическим распределением плотностей или, вообще, эллипсоидальное тело с эллипсоидальным распределением плотностей *).

Итак, пусть тело T обладает указанной геометрической и динамической симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Тогда, по соображениям симметрии, очевидно, что общая точка пересечения этих плоскостей (т. е. центр симметрии тела) является также его центром инерции, а линии пересечения плоскостей симметрии являются также главными центральными осями инерции тела T.

Возьмем начало координат в центре инерции тела, а за координатные оси примем упомянутые главные центральные оси инерции. Тогда плотность тела T (линейная, поверхностная или объемная), т. е. функция $\delta(M)=\delta(x', y', z')$ будет, очевидно, удовлетворять одновременно следующим условиям:

$$\delta(-x', y', z')=\delta(x', -y', z')= \\ =\delta(x', y', -z')=\delta(x', y', z'). \quad (5.42)$$

Пусть теперь вообще $\Phi(M)$ есть некоторая неотрицательная функция текущей точки $M(x', y', z')$ тела, также удовлетворяющая условиям (5.42). Тогда, как нетрудно убедиться, все интегралы типа

$$\int\limits_{(T)} \Phi(M)\,x'\,dT, \quad \int\limits_{(T)} \Phi(M)\,x'y'\,dT, \quad \int\limits_{(T)} \Phi(M)\,x'y'z'\,dT, \quad (5.43)$$

*) Поверхности равной плотности такого эллипсоидального тела будут, очевидно, подобными эллипсоидами, имеющими общий центр с эллипсоидом, ограничивающим тело снаружи, и расположенными подобно ему. Но поверхности равной плотности не обязательно будут подобны внешней поверхности тела.

будут равны нулю. Доказательство может быть проведено совершенно так же, как аналогичное доказательство для случая однородного эллипсоида в § 5 гл. III. Возьмем например, интеграл первого типа с множителем z'. Так как область интегрирования симметрична относительно плоскости xOy, то мы можем написать ($(T_2)=(T_1)$)

$$\int\limits_{(T)} \Phi(M) z'\, dT = \int\limits_{(T_1)} \Phi(M) z'\, dT + \int\limits_{(T_2)} \Phi(M) z'\, dT.$$

Полагая во втором интеграле $z'=-\zeta$ и имея в виду симметрию области интегрирования и свойство функции $\Phi(M)$, мы найдем

$$\int\limits_{(T)} \Phi(M) z'\, dT = \int\limits_{(T_1)} \Phi(M) z'\, dT - \int\limits_{(T_1)} \Phi(M) \zeta\, dT = 0.$$

Подобным же образом показывается, что и все другие интегралы типа (5.43) равны нулю.

В частности, интегралы

$$\int\limits_{(T)} x'\, dm = \int\limits_{(T)} \delta(x', y', z') x'\, dT, \ \ldots$$

и

$$\int\limits_{(T)} x'y'\, dm = \int\limits_{(T)} \delta(x', y', z') x'y'\, dT, \ \ldots$$

суть, очевидно, интегралы типа (5.43) и, следовательно, равны нулю. Поэтому, действительно, центр симметрии тела является одновременно его центром инерции (центром масс), а оси симметрии — главными центральными осями инерции.

Рассмотрим теперь многочлены U_n и $\bar{U}_n$, определяемые формулами (5.24) и (5.26) и коэффициенты которых даются формулами (5.25′), (5.25″) и, соответственно, (5.26′) и (5.26″).

Так как плотность $\delta(x', y' z')$ удовлетворяет условиям (5.42), а функция

$$\frac{1}{r'^{2n+1}} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{-n-\frac{1}{2}}$$

при любом n есть тоже функция типа $\Phi(M)$, то, если хотя бы одно из трех чисел k_1', k_2', k_3' есть число нечетное, соответствующий интеграл $I_n^{(k_1', k_2', k_3')}$ или $\bar{I}_n^{(k_1', k_2', k_3')}$ будет одним из интегралов типа (5.43), а следовательно, будет равен нулю.

Отсюда следует, что если n число нечетное, и так как $k_1'+k_2'+k_3'=n$, то либо одно из k_1', k_2', k_3' либо все три обязательно также будут нечетными, а поэтому все интегралы в формулах (5.25′), (5.26′) будут интегралами типа (5.43) при любых k_1, k_2, k_3, сумма которых есть n.

Поэтому все коэффициенты

$$U_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)},\quad \tilde{U}_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)}$$

будут равны нулю. Следовательно, при n нечетном все многочлены U и $\tilde{U}_n$ тождественно равны нулю и соответствующие разложения силовой функции напишутся для этого случая в виде:

для $r > \bar{r}$

$$U(x,\,y,\,z) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_{2n}(x,\,y,\,z)}{r^{4n+1}}, \tag{5.44}$$

и для $r < \underline{r}$

$$U(x,\,y,\,z) = f\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{U}_{2n}(x,\,y,\,z). \tag{5.45}$$

Многочлены U_{2n} и $\tilde{U}_{2n}$ с четными индексами, разумеется, не равны нулю, но значительно упрощаются. Действительно, из формулы (5.22) следует, что при четном n во всех членах, в которых x, y, z входят только в четных степенях, координаты x', y', z' также входят только в четных степенях. Поэтому коэффициенты (5.25′), (5.26′), для которых (при четном n) все три показателя k_1, k_2, k_3 суть числа четные, вообще отличны от нуля, а все остальные коэффициенты заведомо равны нулю. Следовательно, многочлены U_{2n} и $\tilde{U}_{2n}$ содержат в рассматриваемом случае только члены с четными степенями координат x, y, z и мы имеем, например,

$$U_2(x,\,y,\,z) = U_2^{(2,\,0,\,0)}x^2 + U_2^{(0,\,2,\,0)}y^2 + U_2^{(0,\,0,\,2)}z^2,$$

$$U_4(x,\,y,\,z) = U_4^{(4,\,0,\,0)}x^4 + U_4^{(0,\,4,\,0)}y^4 + U_4^{(0,\,0,\,4)}z^4 + \\ + U_4^{(2,\,2,\,0)}x^2y^2 + U_4^{(2,\,0,\,2)}x^2z^2 + U_4^{(0,\,2,\,2)}y^2z^2$$

2. Перейдем теперь к рассмотрению другого важного частного случая, когда притягивающее тело обладает и геометрической и динамической симметрией относительно некоторой оси. Так, например, геометрической осевой симметрией обладает тело, внешняя поверхность которого есть поверхность вращения вокруг некоторой оси. Тело может быть также простым слоем, распределенным на поверхности вращения. Из одномерных тел геометрической симметрией обладает только окружность и, можно сказать, прямолинейный отрезок.

Если осесимметричное тело однородно, то оно обладает также и механической симметрией относительно той же оси. Но осесимметричное тело может быть и неоднородным.

Простейшим примером тела, обладающего геометрической и динамической симметрией, является, очевидно, однородная материальная окружность (а также однородный прямолинейный отрезок!). Если тело есть простой слой, распределенный на поверхности вращения, то оно обладает механической симметрией, если плотность остается неизменной на любой параллели *), но изменяется произвольным образом при переходе с одной параллели на другую. Наконец, объемное тело обладает указанной симметрией, если в каждом сечении, перпендикулярном к оси вращения, плотность тела зависит только от расстояния до этой оси.

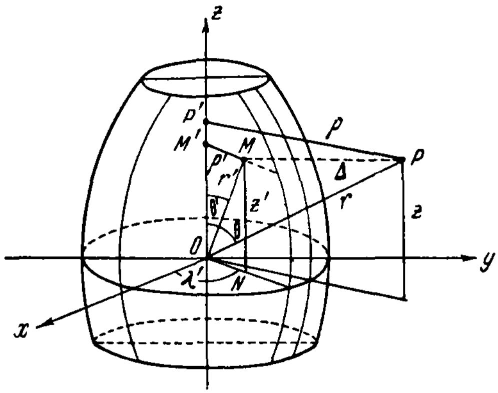

Рис. 30.

Покажем, что разложение силовой функции тела, обладающего геометрической и механической симметрией относительно одной и той же оси, принимает чрезвычайно простой вид, если ось вращения принята за одну из координатных осей декартовой системы координат.

Итак, рассмотрим тело T (одномерное, двумерное или трехмерное), обладающее указанной геометрической и механической симметрией относительно некоторой оси, которую примем за ось аппликат системы координат $Oxyz$. За начало координат примем произвольную точку, лежащую на этой оси, и будем сначала пользоваться сферическими полярными координатами r, θ, λ, к которым присоединим еще расстояние точки до оси вращения ρ, причем очевидно, что $\rho = r \sin\theta$ (рис. 30).

Пусть, как обычно, M есть текущая точка тела, в которой сосредоточен элемент притягивающей массы $dm = \delta(M)\,dT$, где, как и выше, dT обозначает пространственный элемент (линейный, поверхностный или объемный).

Для осесимметричного тела плотность $\delta(M)$, очевидно, не зависит от долготы текущей точки λ' и есть, следовательно,

*) «Параллелью» поверхности вращения называют окружность, получающуюся пересечением поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси вращения. Если тело обладает, вдобавок, плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси вращения, то соответствующая ей параллель называется «экватором». «Меридианом» поверхности вращения называют линию пересечения поверхности вращения плоскостью, проходящей через ось вращения (плоскость меридиана). Очевидно, все меридианы одинаковы и тождественны с производящей кривой, образующей поверхность.

некоторая заданная функция от двух других сферических координат; мы можем использовать для нее какое-либо из следующих обозначений:

$$\delta(M),\quad \delta(r',\theta'),\quad \delta(\rho',\theta'),\quad \delta(r',z'),\quad \delta(\rho',z').$$

Рассмотрим разложения (5.10) и (5.16) силовой функции произвольного притягивающего тела по сферическим функциям $Y_n(\theta,\lambda)$ и $\tilde{Y}_n(\theta,\lambda)$ соответственно. Эти сферические функции определяются соответственно формулами (5.11) и (5.17), а их числовые коэффициенты — формулами (5.12), (5.13) и (5.18), (5.19).

Выражения для коэффициентов сферических функций определяются, таким образом, интегралами, взятыми по всей массе притягивающего тела, а так как тело T обладает геометрической симметрией относительно оси аппликат, то одно из интегрирований в выражениях коэффициентов есть обязательно интегрирование по долготе λ' и производится в пределах от $\lambda'=0$ до $\lambda'=2\pi$. Но плотность $\delta(M)$, входящая множителем в dm, не зависит от λ', а поэтому интегрирования по λ' сводятся к вычислению интегралов

$$\int_0^{2\pi}\cos k\lambda'\,d\lambda',\qquad \int_0^{2\pi}\sin k\lambda'\,d\lambda',$$

которые все равны нулю для $k=1, 2, 3, \ldots$, а для $k=0$ первый из них равен 2π.

Следовательно, все коэффициенты A_{nk}, B_{nk} и $\tilde{A}_{nk}$, $\tilde{B}_{nk}$ равны нулю, за исключением A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$, которые вообще отличны от нуля и являются некоторыми характерными для тела T постоянными.

Теперь разложения (5.10) и (5.16) напишутся в следующем виде*):

для $r>\bar{r}$:

$$U(r,\theta)=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{n0}P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}},\tag{5.46}$$

и для $r<\underline{r}$:

$$U(r,\theta)=f\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_{n0}r^nP_n(\cos\theta).\tag{5.47}$$

---

*) $\bar{r}$ есть наибольшее из расстояний точек какого-либо меридиана внешней поверхности тела до начала, а $\underline{r}$ (в случае существования внутренней полости) — наименьшее из расстояний точек меридиана поверхности, ограничивающей внутреннюю полость тела.

Эти разложения не зависят от долготы λ притягиваемой точки P, что, впрочем, можно было предвидеть заранее по соображениям симметрии.

Формулы (5.46) и (5.47) легко преобразовать к прямоугольным координатам, для чего нужно просто заменить в этих формулах $\cos\theta$ на z/r.

Делая это и воспользовавшись формулой (4.29) для многочленов Лежандра, мы получим разложения силовой функции вида (5.20) и (5.21), которые для рассматриваемого случая примут вид

для $r > \bar{r}$:

$$U(r, z) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{n0}}{r^{n+1}}P_n\left(\frac{z}{r}\right) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(r, z)}{r^{2n+1}}, \tag{5.48}$$

где

$$U_n(r, z) = A_{n0}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}z^{n-2s}r^{2s}, \tag{5.48'}$$

и для $r < \underline{r}$

$$U(r, z) = f\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_{n0}r^nP_n\left(\frac{z}{r}\right) = f\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{U}_n(r, z), \tag{5.49}$$

где

$$\tilde{U}_n(r, z) = \tilde{A}_{n0}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}z^{n-2s}r^{2s}. \tag{5.49'}$$

3. Разложения (5.46), (5.47) и (5.48), (5.49) справедливы для любого тела, обладающего геометрической и механической симметрией относительно одной и той же оси. Если же тело T обладает к тому же симметрией относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к этой оси, то получающиеся разложения силовой функции можно еще несколько упростить надлежащим выбором начала координат.

Действительно, всякое осесимметричное тело обладает, очевидно, бесчисленным множеством плоскостей симметрии, которые все проходят через ось симметрии (меридианные плоскости). Поэтому существует также бесчисленное множество пар взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии, а если тело T обладает еще и плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии, то это тело имеет тогда три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, и мы приходим опять к случаю, рассмотренному выше.

В этом случае точка пересечения оси симметрии с плоскостью симметрии является также центром симметрии, а значит, и центром инерции тела T.

Следовательно, если мы примем центр симметрии за начало координат, оставляя ось симметрии осью аппликат (тогда плоскость симметрии, перпендикулярная к оси вращения, т. е. плоскость экватора, будет плоскостью xOy), мы должны получить разложение силовой функции в виде (5.44) и (5.45) соответственно, откуда следует, что все постоянные A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$ с нечетными индексами должны быть равны в этом случае нулю. Разложения силовой функции напишутся для этого случая в виде

для $r > \bar{r}$:

$$U(r,\ \theta) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n,\,0} P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}}, \tag{5.46'}$$

$$U(r,\ z) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n}(r,\ z)}{r^{4n+1}}, \tag{5.48''}$$

и для $r < \underline{r}$:

$$U(r,\ \theta) = f \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n,\,0} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta), \tag{5.47'}$$

$$U(r,\ z) = f \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_{2n}(r,\ z). \tag{5.49''}$$

Укажем формулы для вычисления коэффициентов A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$ отдельно для случая, когда притягивающее тело есть простой слой, и отдельно для трехмерного тела.

Итак, пусть тело T есть простой слой, лежащий на поверхности вращения вокруг оси Oz, и пусть $r' = f(\theta')$ есть уравнение производящей кривой, или меридианного сечения тела.

Поверхностная плотность слоя $\delta(M)$ не должна зависеть от долготы λ' и есть, следовательно, функция только от угла θ'. Эту плотность можно рассматривать так же, как функцию от $\nu' = \cos\theta'$, или как функцию от r', так что мы можем использовать для нее одно из обозначений

$$\delta(M), \quad \delta(\theta'), \quad \delta(\nu'), \quad \delta(r').$$

Имея теперь в виду, что элемент площади поверхности вращения можно определить формулой

$$d\sigma = 2\pi\rho'\, ds',$$

где

$$\rho' = r'\sin\theta', \quad ds' = d\theta' \sqrt{r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2},$$

мы получим без труда

$$A_{n0} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r'^{n+1} P_n(\cos\theta')\, \delta(\theta') \sin\theta' \sqrt{r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2}\, d\theta', \tag{5.50}$$

и

$$\tilde{A}_{n0} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r'^{-n} P_n(\cos\theta')\,\delta(\theta')\sin\theta' \sqrt{r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2}\,d\theta', \quad (5.51)$$

где α и β суть значения угла θ', соответствующие концевым точкам производящей кривой.

Можно, конечно, получить и другие формулы для вычисления этих коэффициентов, в зависимости от того, какая переменная принята за переменную интегрирования.

Пусть теперь поверхность, несущая слой, симметрична относительно плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Примем за начало координат точку пересечения оси вращения и плоскости симметрии («центр» поверхности), и пусть в этой системе координат плотность слоя удовлетворяет условию

$$\delta(\pi - \theta') = \delta(\theta').$$

Тогда притягивающее тело обладает не только геометрической, но и механической симметрией, и все коэффициенты разложения с нечетными значками должны быть равны нулю.

Действительно, в этом случае

$$\beta = \pi - \alpha, \quad r'(\pi - \theta') = r'(\theta')$$

и так как $P_n(\cos\theta')$ при нечетных n содержит только нечетные степени $\cos\theta'$, то формулы (5.50) и (5.51) дают непосредственно $A_{2n+1,\,0} = \tilde{A}_{2n+1,\,0} = 0$.

Рассмотрим теперь случай трехмерного тела, обладающего геометрической и механической осевой симметрией.

Пусть $r = f(\theta)$ есть уравнение производящей кривой внешней поверхности тела, α и β — значения полярного угла θ, соответствующего концам дуги этой кривой и $\delta(r', \theta')$ — объемная плотность тела.

Так как элемент массы можно определить по формуле

$$dm = \delta(r', \theta')\,r'^2 \sin\theta'\;dr'\;d\theta'\;d\lambda',$$

то формулы (5.12) и (5.18) после выполнения интегрирования по долготе λ' напишутся в виде

$$A_{n0} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{f(\theta')} r'^{n+2} P_n(\cos\theta')\,\delta(r', \theta')\sin\theta'\,dr'\,d\theta', \quad (5.52)$$

и

$$\tilde{A}_{n0} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{f(\theta')} r'^{-n+1} P_n(\cos\theta')\,\delta(r', \theta')\sin\theta'\,dr'\,d\theta'. \quad (5.53)$$

Выбирая переменные интегрирования как-нибудь иначе, мы получим некоторые другие, иногда более удобные, формулы для этих коэффициентов.

Возьмем, например, вместо сферических координат r, θ, λ цилиндрические ρ, z, λ.

Пусть $\rho = R(z)$ есть уравнение производящей кривой внешней поверхности тела, c и d — аппликаты концов дуги этой кривой (меридиана) и $\delta(\rho', z')$ — плотность тела.

Тогда имеем следующие формулы:

$$A_{n0} = 2\pi \int_c^d \int_0^{R(z')} r'^n P_n\left(\frac{z'}{r'}\right) \delta(\rho', z') \rho' \, d\rho' \, dz' \tag{5.52'}$$

и

$$\tilde{A}_{n0} = 2\pi \int_c^d \int_0^{R(z')} r'^{-n-1} P_n\left(\frac{z'}{r'}\right) \delta(\rho', z') \rho' \, d\rho' \, dz'. \tag{5.53'}$$

Пусть теперь тело T обладает кроме того симметрией относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к оси симметрии (плоскость экватора). Тогда точка пересечения этой плоскости с осью симметрии является центром инерции тела, а две главные оси инерции лежат в этой плоскости симметрии.

Возьмем эту точку за начало координат, оставляя осью аппликат ось симметрии, так что плоскость экватора есть плоскость xOy.

Тогда, очевидно, будем иметь

$$f(\pi - \theta') = f(\theta'), \quad \delta(r', \pi - \theta') = \delta(r', \theta'), \quad \beta = \pi - \alpha,$$

или

$$R(-z') = R(z'), \quad \delta(\rho', -z') = \delta(\rho', z'), \quad c = -d$$

и формулы (5.52), (5.53) или (5.52′), (5.53′) дадут непосредственно $A_{2n+1,0} = \tilde{A}_{2n+1,0} = 0$, как это и должно быть.

Примечание. Мы рассмотрели в этом параграфе **случаи**, когда притягивающее тело имеет либо три взаимно перпендикулярные плоскости геометрической и механической симметрии, либо когда тело имеет ось симметрии, а стало быть, бесчисленное множество пар взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии.

Вообще возможен и такой случай, когда тело имеет всего только одну плоскость симметрии. В этом случае разложение силовой функции не допускает существенного упрощения. Можно отметить только, что если такую плоскость симметрии взять за одну из координатных плоскостей, например, за плоскость

xOy, то силовая функция сделается четной функцией относительно координаты z, и, следовательно, будет содержать только четные степени z.

Поэтому разложения типа (5.20) и (5.21) здесь остаются в силе, только многочлены U_n и $\tilde{U}_n$ будут удовлетворять условиям

$$U_n(x, y, -z) = U_n(x, y, z),$$
$$\tilde{U}_n(x, y, -z) = \tilde{U}_n(x, y, z).$$

Полезно еще заметить, что если тело имеет единственную плоскость симметрии, то цетр инерции тела обязательно находится в этой плоскости и может быть принят за начало координат.

Тогда многочлен $U_1(x, y, z)$ будет тождественно равен нулю и это будет единственное упрощение, возможное в отмечаемом случае.

§ 5. Простейшие примеры разложения силовой функции

1. Здесь мы будем рассматривать некоторые специальные случаи, когда оказывается возможным дать общие выражения для коэффициентов разложения силовой функции притягивающего тела в конечном виде, или, по крайней мере, в наиболее простой форме.

Такие примеры, естественно, приходится выбирать из тех случаев, когда тело T имеет возможно более простую (геометрически) форму и когда оно обладает возможно более простой структурой, например, когда его плотность есть величина постоянная.

Кроме того, на форму разложения силовой функции и на выражения для коэффициентов этого разложения оказывает также влияние выбор системы координат, так что иногда можно подходящим выбором координатной системы получить наипростейшие формулы.

Случаи, которые мы будем здесь рассматривать, имеют и методическое и прикладное значение, так как они часто встречаются в приложениях, например, в разнообразных задачах небесной механики, как классической, так и современной.

Случай 1. Прямолинейный материальный отрезок.

Пусть притягивающее тело T является прямолинейным материальным отрезком (стержнем!), вообще говоря, неоднородным. Тогда в обозначениях § 3 гл. II мы имеем следующее выражение для силовой функции такого стержня на внешнюю точку единичной массы, в произвольно выбранной системе