

xOy , то силовая функция сделается четной функцией относительно координаты z , и, следовательно, будет содержать только четные степени z .

Поэтому разложения типа (5.20) и (5.21) здесь остаются в силе, только многочлены U_n и \tilde{U}_n будут удовлетворять условиям

$$U_n(x, y, -z) = U_n(x, y, z),$$

$$\tilde{U}_n(x, y, -z) = \tilde{U}_n(x, y, z).$$

Полезно еще заметить, что если тело имеет единственную плоскость симметрии, то центр инерции тела обязательно находится в этой плоскости и может быть принят за начало координат.

Тогда многочлен $U_1(x, y, z)$ будет тождественно равен нулю и это будет единственное упрощение, возможное в отсечаемом случае.

§ 5. Простейшие примеры разложения силовой функции

1. Здесь мы будем рассматривать некоторые специальные случаи, когда оказывается возможным дать общие выражения для коэффициентов разложения силовой функции притягивающего тела в конечном виде, или, по крайней мере, в наиболее простой форме.

Такие примеры, естественно, приходится выбирать из тех случаев, когда тело T имеет возможно более простую (геометрически) форму и когда оно обладает возможно более простой структурой, например, когда его плотность есть величина постоянная.

Кроме того, на форму разложения силовой функции и на выражения для коэффициентов этого разложения оказывает также влияние выбор системы координат, так что иногда можно подходящим выбором координатной системы получить наиболее простые формулы.

Случаи, которые мы будем здесь рассматривать, имеют и методическое и прикладное значение, так как они часто встречаются в приложениях, например, в разнообразных задачах небесной механики, как классической, так и современной.

Случай 1. Прямолинейный материальный отрезок.

Пусть притягивающее тело T является прямолинейным материальным отрезком (стержнем!), вообще говоря, неоднородным. Тогда в обозначениях § 3 гл. II мы имеем следующее выражение для силовой функции такого стержня на внешнюю точку единичной массы, в произвольно выбранной системе

координат *) (см. рис. 5 на стр. 56):

$$U(P) = f \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{\delta(s) ds}{\sqrt{R^2 + s^2 + 2Rvs}}, \quad (5.54)$$

где плотность $\delta(s)$ есть заданная, интегрируемая в промежутке $(-l_1, +l_2)$ функция от расстояния s текущей точки M стержня до фиксированной его точки G , $R = \overline{PG}$ и $v = \cos(\overline{PG}, \overline{AB})$ (A — начало, B — конец стержня).

Используя выражение для производящей функции многочленов Лежандра, мы без труда получим разложение силовой функции в виде

$$U = \frac{f}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n P_n(v)}{R^n}, \quad (5.55)$$

где коэффициенты определяются формулой

$$A_n = (-1)^n \int_{-l_1}^{+l_2} \delta(s) s^n ds. \quad (5.56)$$

Ряд (5.55) сходится абсолютно и равномерно при $R > l$, где l наибольшее из двух чисел l_1 и l_2 . Если точка G есть середина отрезка \overline{AB} и плотность $\delta(s)$ удовлетворяет условию

$$\delta(-s) = \delta(s),$$

то все коэффициенты A_n с нечетными индексами равны нулю и разложение (5.55) получает следующий вид:

$$U = \frac{f}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n} P_{2n}(v)}{R^{2n}}, \quad (5.55')$$

где

$$A_{2n} = \int_{-l}^{+l} \delta(s) s^{2n} ds \quad (5.56')$$

(в этом случае $l_1 = l_2 = l$). В частности, если плотность $\delta(s)$ есть величина постоянная, то разложение силовой функции получает вид

$$U = \frac{fm}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n}(v)}{2n+1} \left(\frac{l}{R}\right)^{2n}, \quad (5.55'')$$

где $m = 2l\delta$ — масса стержня.

*) В § 3 гл. II мы рассматривали однородный стержень. Этот случай получится, если считать в (5.54) плотность $\delta(M)$ постоянной и положить $m = \delta(l_1 + l_2)$, где m — масса стержня.

Отметим еще, что, беря начало координат в точке G , а прямую \overrightarrow{AB} принимая за ось аппликат, мы имеем

$$R=r, \quad v=\cos \theta,$$

и разложение (5.55) принимает вид (5.46), что и понятно, так как прямолинейный стержень можно рассматривать как предельный случай тела, обладающего осевой симметрией.

Случай 2. Однородная материальная окружность.

Пусть притягивающее тело есть однородная материальная окружность (круговое кольцо Гаусса). Как уже отмечалось, такое тело обладает и геометрической и механической симметрией относительно оси, проходящей через центр окружности, перпендикулярно к ее плоскости. Кроме того, очевидно, что такое тело можно считать также обладающим плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии. Этой плоскостью является просто плоскость самой окружности.

Возьмем начало координат в произвольной точке оси окружности, и пусть a будет радиус окружности и h — расстояние от начала координат до центра окружности G (рис. 31).

Разложение силовой функции определится тогда формулами (5.46) и (5.47), а коэффициенты A_{n0} и \bar{A}_{n0} этих разложений найдутся по формулам (5.12) и (5.18) при $k=0$.

Так как

$$dm = \delta ds = a \delta d\lambda'$$

и для любой точки M окружности

$$r' = \sqrt{a^2 + h^2} = \text{const}, \quad \cos \theta' = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \text{const},$$

то, полагая для сокращения

$$R = \sqrt{a^2 + h^2},$$

мы найдем из формул (5.12) и (5.13) после интегрирования по λ' в пределах от 0 до 2π :

$$A_{n0} = 2\pi a \delta R^n P_n \left(\frac{h}{R} \right),$$

$$\bar{A}_{n0} = 2\pi a \delta R^{-n-1} P_n \left(\frac{h}{R} \right).$$

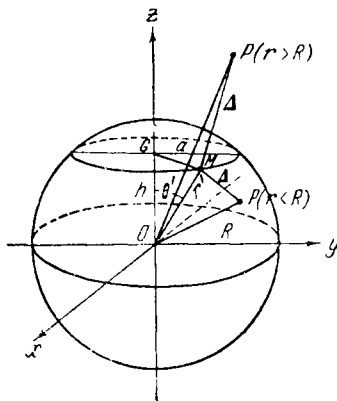


Рис. 31.

Далее имеем, очевидно,

$$2\pi a b = m, \quad \bar{r} = \underline{r} = R,$$

где m — масса кольца, и разложение силовой функции напишется следующим образом:

для $r > R$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{h}{R}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad (5.57)$$

и для $r < R$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{h}{R}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (5.58)$$

Формулы (5.56) и (5.57) определяют силовую функцию гауссова кольца во всем пространстве, за исключением точек, лежащих на поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат. Если точка P лежит на самом кольце, т. е. если

$$r = R, \quad \cos \theta = \frac{h}{R},$$

то, так как в этом случае силовая функция обращается в бесконечность (см. § 3 гл. II), ряды (5.57) и (5.58) заведомо расходятся.

Разложения (5.57) и (5.58) существенно упрощаются, если начало координат взять в центре кольца G (рис. 32).

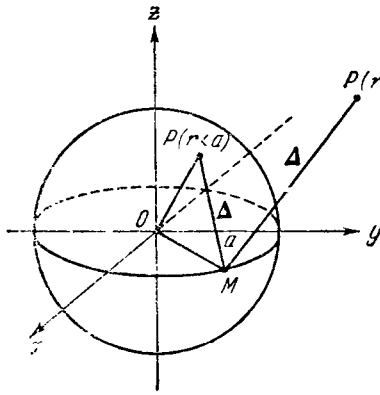


Рис. 32.

В этом случае, как нетрудно видеть,

$$h = 0, \quad R = a.$$

Кроме того, формулы (4.36) гл. IV дают

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

и мы получаем следующие разложения:

для $r > a$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \quad (5.57')$$

и для $r < a$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta). \quad (5.58')$$

Эти две формулы определяют силовую функцию кольца во всем пространстве, за исключением точек, лежащих на поверхности сферы радиуса a , центр которой совпадает с центром кольца.

Если точка P попадает на само кольцо, то ряды (5.57') и (5.58'), безусловно, расходятся.

Отметим еще случай, когда притягиваемая точка находится в плоскости кольца. Тогда $\cos\theta=0$, и заменяя $P_{2n}(0)$ его значением, мы получим

для $r > a$:

$$U(r) = \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{a}{r} \right)^{2n}, \quad (5.57'')$$

и для $r < a$:

$$U(r) = \frac{fm}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{r}{a} \right)^{2n}. \quad (5.58'')$$

Заметим, что каждая из этих двух сумм представляет (с точностью до множителя $\frac{\pi}{2}$) разложение полного эллиптического интеграла первого рода с модулем $\frac{a}{r}$ и $\frac{r}{a}$ соответственно*), и мы можем написать также

$$U(r) = \frac{2fm}{\pi r} K\left(\frac{a}{r}\right) \quad (r > a) \quad (5.57''')$$

и

$$U(r) = \frac{2fm}{\pi a} K\left(\frac{r}{a}\right) \quad (r < a). \quad (5.58''')$$

Случай 3. Плоское круглое кольцо и диск.

Перейдем к рассмотрению простейших случаев разложения силовой функции двумерного притягивающего тела или простого слоя. Сначала рассмотрим слой, распределенный на плоском круглом кольце и, в частности, на плоском круглом диске. Очевидно, что в этом случае притягивающее тело обладает геометрической осевой симметрией относительно прямой, проходящей через центр кольца, перпендикулярно к его плоскости.

Мы ограничимся рассмотрением разложения силовой функции подобного простого слоя для случая, когда слой обладает также и механической симметрией относительно той же оси, для

*) См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

чего необходимо, чтобы плотность $\delta(M)$ слоя зависела только от расстояния точки M до центра G кольца. Пусть

$$\delta(M) = \delta(\rho')$$

есть заданная интегрируемая функция от ρ' в промежутке (a_1, a_2) , где a_1 обозначает внутренний, а a_2 — внешний радиус кольца. Возьмем начало координат в любой точке O оси симметрии (рис. 33). Тогда разложение силовой функции определится формулами (5.46), (5.47), и нам остается только вычислить коэффициенты A_{n0} и \bar{A}_{n0} и найти пределы \bar{r} и \underline{r} .

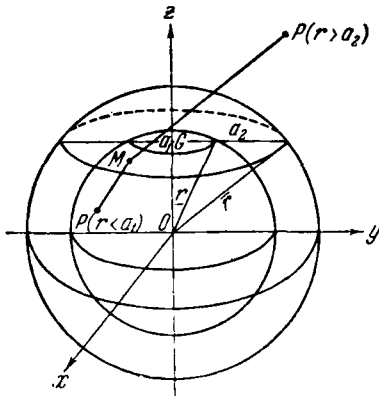


Рис. 33.

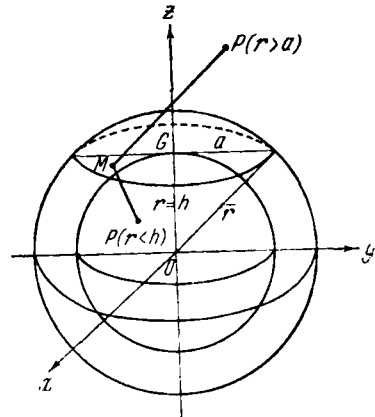


Рис. 34.

Пусть h есть расстояние от начала координат до центра кольца G , который является, очевидно, также центром инерции кольца. Тогда, как легко видеть,

$$\bar{r} = \sqrt{a_2^2 + h^2}, \quad \underline{r} = \sqrt{a_1^2 + h^2}.$$

Для большего удобства вычисления коэффициентов примем за переменную интегрирования ρ' . Так как

$$dm = \delta(\rho') \rho' d\rho' d\lambda', \quad r' = \sqrt{\rho'^2 + h^2}, \quad \cos \theta' = \frac{h}{r'},$$

то мы из формул (5.12) и (5.18) для $k=0$ после выполнения интегрирования по λ' получим следующие выражения для коэффициентов:

$$A_{n0} = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} r'^n P_n\left(\frac{h}{r'}\right) \delta(\rho') \rho' d\rho', \quad (5.59)$$

и

$$\tilde{A}_{n0} = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} r'^{-n-1} P_n\left(\frac{h}{r'}\right) \delta(r') \rho' d\rho'. \quad (5.60)$$

Если простой слой распределен на диске радиуса a , то $a_1=0$ и $a_2=a$, а (рис. 34)

$$\bar{r} = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad \underline{r} = h.$$

Выражения для коэффициентов несколько упрощаются, если за начало координат взята точка G — центр кольца. Действительно, тогда $h=0$, $r'=\rho'$, все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, а коэффициенты с четными индексами найдутся по формулам

$$A_{2n,0} = 2\pi (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_{a_1}^{a_2} \rho'^{2n+1} \delta(\rho') d\rho' \quad (5.59')$$

и

$$\tilde{A}_{2n,0} = 2\pi (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_{a_1}^{a_2} \rho'^{-2n} \delta(\rho') d\rho'. \quad (5.60')$$

Поэтому разложение силовой функции в этом случае будет иметь следующий вид:

для $r > a_2$:

$$U(r, \theta) = 2\pi f \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{P_{2n}(\cos \theta)}{r^{2n+1}} \int_{a_1}^{a_2} \rho'^{2n+1} \delta(\rho') d\rho', \quad (5.61)$$

и для $r < a_1$:

$$U(r, \theta) = 2\pi f \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} r^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \int_{a_1}^{a_2} \rho'^{-2n} \delta(\rho') d\rho'. \quad (5.62)$$

Если кольцо превращается в диск, то имеем для $r > a$:

$$U(r, \theta) = 2\pi f \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{P_{2n}(\cos \theta)}{r^{2n+1}} \int_0^a \rho'^{2n+1} \delta(\rho') d\rho'. \quad (5.63)$$

Ряды (5.61), (5.62) определяют силовую функцию, за исключением точек, лежащих внутри шарового слоя с центром в G и с радиусами a_1 и a_2 . Ряд (5.63) также определяет силовую функцию диска во всем пространстве, внешнем по отношению к сфере радиуса a с центром в точке G .

Однако интересно отметить, что каждый из этих рядов оказывается сходящимся на границе области сходимости *).

Действительно, положим в формуле (5.61) $r = a_2$ и $\cos \theta = 0$, т. е. поместим притягиваемую точку P на внешний край кольца, несущего на себе простой слой.

Тогда имеем

$$U\left(a_2, \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi f \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{a_2^{2n+1}} \int_{a_1}^{a_2} \rho'^{2n-1} \delta(\rho') d\rho'. \quad (5.61')$$

Пусть $\bar{\delta}$ есть наибольшее значение функции $\delta(\rho')$ в промежутке (a_1, a_2) . Тогда ряд (5.61) будет сходиться абсолютно, если сойдется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{1 - a^{2n+2}}{2n+2}; \quad (5.61'')$$

где $a = \frac{a_1}{a_2} < 1$.

Но ряд (5.61) можно рассматривать как разность двух рядов с общими членами

$$u_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+2}, \quad v_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{a^{2n+2}}{2n+2}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = a^2 < 1,$$

откуда следует, что ряд с общим членом v_n — сходящийся. Доказательство сходимости другого ряда несколько менее элементарно, так как для него

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Но, с другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right] = -2,$$

откуда следует по признаку Раабе **), что ряд с общим членом u_n сходится. Следовательно, ряд (5.61'') также сходится, а значит, сходится и ряд (5.61'), и формула (5.61') дает значение силового!

*) Г. Н. Дубошин, Разложение силовой функции кольца, диска и сфероида, Вестник МГУ, № 1, 1948, или Г. Н. Дубошин, Теория притяжения, Физматгиз, 1961.

**) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 1, ч. 2, 1933.

функции на внешнем крае кольца. Также доказывается сходимость ряда (5.62) при $r = a_1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. на внутреннем крае кольца и ряда (5.63) при $r = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. на крае диска.

Приведенные соображения позволяют построить разложение силовой функции кольца или диска также для случая, когда притягиваемая точка P составляет часть притягивающей массы.

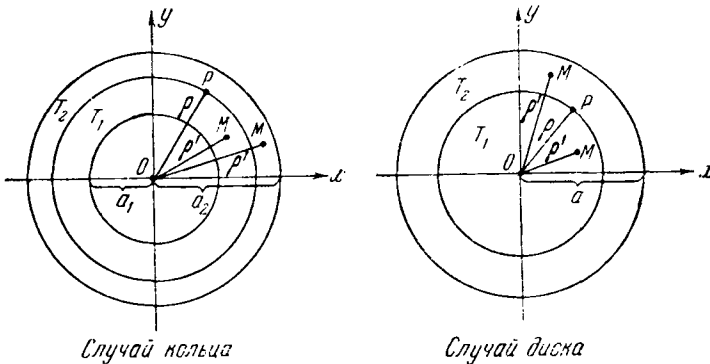


Рис. 35.

Действительно, пусть притягиваемая точка (единичной массы) лежит внутри кольца на расстоянии ρ от его центра (рис. 35), так что $(a_1 < \rho < a_2)$. Тогда силовая функция в точке P есть, очевидно, сумма двух силовых функций, а именно, силовой функции кольца T_1 с внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом ρ на точку, лежащую на внешнем крае этого кольца, и силовой функции кольца T_2 с внутренним радиусом ρ и внешним радиусом a_2 на точку, лежащую на внутреннем крае.

Поэтому первая часть U_1 полной силовой функции получится из (5.61), где нужно положить

$$0 = \frac{\pi}{2}, \quad r = \rho, \quad a_2 = \rho,$$

а вторая часть U_2 — из формулы (5.62), в которой нужно положить

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r = \rho, \quad a_1 = \rho.$$

Делая это, мы получим выражение для силовой функции

$$U = U_1 + U_2$$

простого слоя плотности $\delta(\rho')$, распределенного на круглом кольце, на точку P , лежащую внутри кольца, в следующем виде:

$$U(\rho) = 2\pi f \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 U_{2n}(\rho), \quad (5.64)$$

где положено для сокращения

$$U_{2n}(\rho) = \int_{a_1}^{\rho} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^{2n+1} \delta(\rho') d\rho' + \int_{\rho}^{a_2} \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{2n} \delta(\rho') d\rho'.$$

Согласно установленному выше ряд (5.64) сходится для всякого значения ρ , удовлетворяющего неравенству $a_1 \leq \rho \leq a_2$.

Полагая в формуле (5.64) $a_1=0$ и $a_2=a$, мы получим разложение силовой функции простого слоя, лежащего на диске, на внутреннюю точку P в виде

$$U(\rho) = 2\pi f \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \bar{U}_{2n}(\rho), \quad (5.65)$$

где

$$\bar{U}_{2n}(\rho) = \int_0^{\rho} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^{2n+1} \delta(\rho') d\rho' + \int_{\rho}^a \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{2n} \delta(\rho') d\rho'.$$

Ряд (5.65) сходится для всякого значения ρ в промежутке $0 \leq \rho \leq a$.

Если плотность $\delta(\rho')$ есть величина постоянная, то все приведенные выше формулы значительно упрощаются.

Например, положим $\delta = \text{const}$ в формулах (5.63) и (5.65), определяющих силовую функцию диска на внешнюю и внутреннюю точки.

После простых преобразований мы получим разложение силовой функции однородного диска в виде для $r \geq a$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)(2n)!!} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \quad (5.63')$$

и для $0 \leq \rho \leq a$, $\cos \theta = 0$

$$U(\rho) = -\frac{fm}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2n}. \quad (5.65')$$

2. Случай 4. Эллипсоид вращения. В качестве последнего примера найдем разложение силовой функции эллипсоида

дального тела T , обладающего некоторой специальной структурой.

Итак, пусть притягивающее тело ограничено поверхностью эллипсоида вращения (сжатого или вытянутого), образованного вращением эллипса с полуосями a и c ($a > c$) вокруг его большой или малой оси. Тогда тело T обладает, очевидно, геометрической симметрией и относительно оси вращения и относительно плоскости, проходящей через центр эллипсоида перпендикулярно к оси вращения (экваториальная плоскость).

Возьмем центр эллипсоида за начало координат, а ось аппликат направим по оси вращения поверхности тела. Тогда две другие оси расположатся как-нибудь (перпендикулярно друг другу) в экваториальной плоскости тела T .

Если не делать никаких упрощающих предположений о структуре тела T , то разложение силовой функции эллипсоида на внешнюю точку будет иметь общий вид (5.10), а коэффициенты сферических функций $Y_n(\theta, \lambda)$ определятся общими формулами (5.12), (5.13), в которых нужно положить

$$dm = \delta(M) r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda',$$

а интегралы брать по всему объему эллипсоида.

Мы ограничимся рассмотрением более простого случая, когда поверхности равной плотности в теле T суть также поверхности вращения (не обязательно эллипсоиды) вокруг оси вращения эллипсоида, являющегося внешней поверхностью тела. Тогда тело T будет обладать не только геометрической, но и механической симметрией относительно упомянутой оси вращения и разложение силовой функции тела T на внешнюю точку P напишется в виде

$$U(r, \theta) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0} P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad (5.66)$$

причем ряд сходится равномерно и абсолютно во всяком случае в области $r > \bar{r} = a$ (рис. 36).

Остается вычислить коэффициенты A_{n0} этого разложения. Так как в рассматриваемом нами случае плотность $\delta(M)$ не зависит от долготы λ' текущей точки M , то формула (5.12) после интегрирования по долготе λ' в пределах от нуля до 2π даст

$$A_{n0} = 2\pi \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \int_0^{R(\theta')} \delta(r', \theta') r'^{n+2} dr', \quad (5.67)$$

где верхний предел внутреннего интеграла берется из уравнения внешней поверхности тела, или, что то же, из уравнения

производящего эллипса, которое может быть написано в виде

$$r = R(\theta) \quad \text{или} \quad r = R(v).$$

Так как плотность $\delta(M)$ можно рассматривать так же как функцию от r' и $v' = \cos \theta'$, то вместо формулы (5.67) мы можем написать следующую формулу:

$$A_{n0} = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_n(v') dv' \int_0^{R(v')} \delta(r', v') r'^{n+2} dr'. \quad (5.68)$$

Если плотность тела T удовлетворяет добавочному условию

$$\delta(r', -v') = \delta(r', v'),$$

то тело обладает также механической симметрией относительно экваториальной плоскости и центр эллипсоида будет в этом

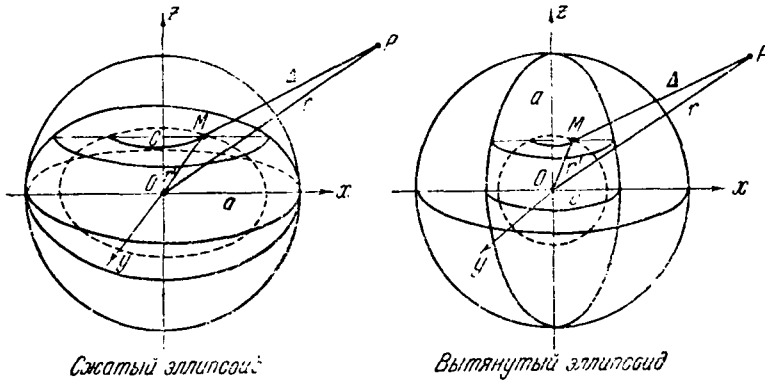


Рис. 36.

случае также центром инерции тела. Тогда, как мы знаем, все коэффициенты с нечетными значками n будут равны нулю и разложение силовой функции нашего эллипсоидального тела примет вид

$$U(r, \theta) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n,0} P_{2n}(\cos \theta)}{r^{2n+1}}, \quad (5.66')$$

где

$$A_{2n,0} = 2\pi \int_0^{\pi} P_{2n}(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \int_0^{R(\theta')} \delta(r', \theta') r'^{n+2} dr' \quad (5.67')$$

или

$$A_{2n,0} = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_{2n}(v') dv' \int_0^{R(v')} \delta(r', v') r'^{n+2} dr'. \quad (5.68')$$

3. Особенно интересен случай, когда тело T есть однородный эллипсоид вращения, так как в этом случае все интегралы в формулах для коэффициентов вычисляются весьма просто и коэффициенты представляются простыми конечными формулами. Покажем это сначала для случая однородного сжатого эллипсоида вращения.

Так как ось вращения эллипсоида принята за ось Oz , то уравнение внешней поверхности тела T имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Преобразуя это уравнение к сферическим координатам, найдем

$$r^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) = 1,$$

откуда, полагая

$$a^2 - c^2 = c^2 l^2, \quad \cos \theta = v,$$

имеем

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + l^2 v^2}} = R(v).$$

Воспользуемся теперь формулой (5.68'). Полагая $\delta = \text{const}$ и выполняя внутреннее интегрирование, получим

$$A_{2n,0} = \frac{2\pi\delta}{2n+3} \int_{-1}^{+1} R^{2n+3}(v') P_{2n}(v') dv',$$

или

$$A_{2n,0} = \frac{2\pi \delta a^{2n+3}}{2n+3} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n}(v') dv'}{(1 + l^2 v'^2)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Но интеграл, входящий в последнюю формулу, вычисляется по формуле Лежандра (см. формулу (4.90) гл. IV), в которой надо положить $\rho = l^2$, вследствие чего найдем следующее выражение:

$$A_{2n,0} = \frac{4\pi \delta a^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(-l^2)^n}{(1+l^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

которое легко преобразуется к виду

$$A_{2n,0} = 4\pi \delta a^2 c \frac{(-1)^n l^{2n} c^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}. \quad (5.69)$$

Замечая еще, что масса сжатого эллипсоида вращения определяется формулой

$$m = \frac{4}{3} \pi a^2 c \delta,$$

мы можем также написать

$$A_{2n,0} = 3m \frac{(-1)^n l^{2n} c^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}, \quad (5.69')$$

вследствие чего разложение силовой функции однородного сжатого эллипсоида вращения на внешнюю точку единичной массы примет следующую примечательную форму:

$$U(r, \theta) = \frac{jm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{c}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) *). \quad (5.70)$$

Подобным же образом получим и разложение силовой функции однородного вытянутого эллипсоида вращения. Так как ось вращения есть ось Oz , то уравнение внешней поверхности тела напишется в виде

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

откуда, переходя к полярным координатам и полагая

$$a^2 - c^2 = e^2 a^2, \quad v = \cos \theta,$$

имеем

$$r = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2 v^2}} = R(v).$$

Применяя опять формулу (5.68'), найдем (так же как и для сжатого эллипсоида)

$$A_{2n,0} = \frac{2\pi \delta c^{2n+3}}{2n+3} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n}(v') dv'}{(1 - e^2 v'^2)^n \cdot \frac{3}{2}}.$$

Воспользовавшись опять формулой Лежандра, получим после упрощений

$$A_{2n,0} = 3m \frac{e^{2n} a^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}, \quad (5.71)$$

где

$$m = \frac{4}{3} \pi a c^2 \delta$$

есть масса однородного вытянутого эллипсоида.

Поэтому разложение силовой функции однородного вытянутого эллипсоида на внешнюю точку (единичной массы) напишется в виде

$$U(r, \theta) = \frac{jm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta). \quad (5.72)$$

*) Иным способом эта формула была выведена А. А. Орловым в статье: Об одном способе разложения силовой функции сжатого эллипсоида вращения в ряд по многочленам Лежандра, Труды ГАИШ, т. XXIV, 1954.

Все ряды, рассмотренные в этом параграфе, заведомо сходятся абсолютно и равномерно в области $r > \bar{r} = a$, т. е. вне сферы радиуса a , описанной из центра эллипсоида.

Однако область сходимости этих рядов может быть и более широкой. Действительно, рассмотрим ряд (5.70). Так как $|P_{2n}(\cos \theta)| \leq 1$, то этот ряд будет абсолютно сходящимся для всякого значения r , при котором сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{c}{r}\right)^{2n}.$$

Но последний, как нетрудно убедиться, сходится, если выполняется условие $r^2 \geq l^2 c^2$, и расходится, если $r^2 < l^2 c^2$.

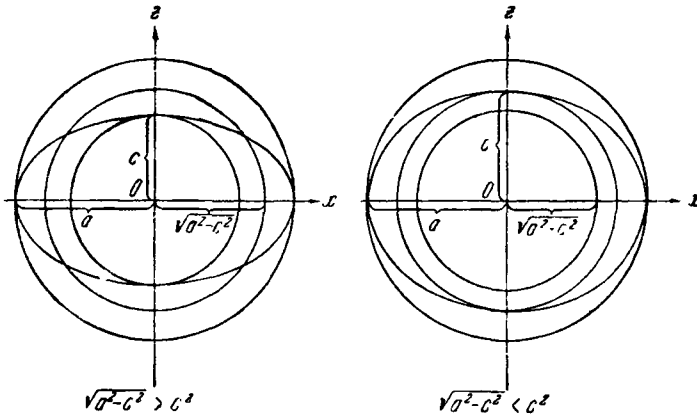


Рис. 37.

Следовательно, ряд (5.70) сходится абсолютно также в области $r \geq \sqrt{a^2 - c^2}$, т. е. вне сферы, описанной из центра эллипсоида радиусом, равным половине фокального расстояния производящего эллипса (рис. 37). В этой области имеется также множество внутренних точек эллипсоида, но, разумеется, в этих точках ряд (5.70) не представляет силовую функцию тела T .

Интересно отметить, что если полуоси эллипсоида, являющегося внешней поверхностью притягивающего тела, таковы, что выполняется условие $a \leq \sqrt{2}c$, то ряд (5.70) сходится абсолютно в области $r \geq c$ и, следовательно, представляет силовую функцию этого тела во всем пространстве, за исключением внутренней области.

В точках внешней поверхности тела T силовая функция представляется (при условии $a \leq \sqrt{2}c$) рядом

$$U = \frac{3jm\bar{R}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n} \bar{R}^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\cos \theta), \quad (5.72')$$

где

$$\bar{R} = \sqrt{1 + l^2 \cos^2 \theta}.$$

Так же доказывается, что ряд (5.71) сходится при $r \geq \sqrt{a^2 - c^2}$, а при выполнении условия $a \leq \sqrt{2}c$ этот ряд сходится в области $r \geq c$ и представляет силовую функцию однородного вытянутого эллипсоида вращения во всем пространстве, за исключением внутренней области.

В точках внешней поверхности тела силовая функция представляется рядом (при условии $a \leq \sqrt{2}c$)

$$U = \frac{3jm\tilde{R}}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^{2n} \tilde{R}^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\cos \theta), \quad (5.72'')$$

где

$$\tilde{R} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}.$$

Доказанное остается справедливым и для неоднородного эллипсоидального тела, поверхности равной плотности которого суть поверхности вращения вокруг оси вращения эллипсоида, симметричные относительно его экваториальной плоскости. Действительно, силовая функция такого тела определяется формулой (5.66), коэффициенты которого даются формулой (5.67) или (5.68). Так как плотность δ ограничена внутри эллипсоида, то существует такое положительное число $\bar{\delta}$, что

$$\delta(M) \leq \bar{\delta}.$$

Поэтому коэффициенты ряда (5.66) численно не превышают коэффициентов такого же ряда, определяющего силовую функцию однородного эллипсоида с плотностью $\bar{\delta}$. Но мы только что показали, что разложение силовой функции однородного эллипсоида всегда сходится абсолютно при $r \geq \sqrt{a^2 - c^2}$, а если выполнено условие $a \leq \sqrt{2}c$, то при $r \geq c$. Поэтому ряд (5.66) также сходится абсолютно при тех же условиях.

Если мы имеем тело, ограниченное поверхностью сжатого эллипсоида вращения, то для характеристики формы такого тела удобно ввести величину, называемую «сжатием» и определяемую формулой

$$\alpha = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}.$$

Поэтому условие $a \leq \sqrt{2}c$ может быть также записано в следующем виде:

$$\alpha \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,2928932.$$

Известно, что каждая из больших планет солнечной системы по внешнему виду весьма похожа на эллипсоид вращения, полярная ось которого меньше экваториальной. Сжатие каждой из этих планет весьма мало и во всяком случае меньше указанного предела.

Поэтому силовую функцию каждой из больших планет можно приближенно представить рядом (5.66), сходящимся во всем внешнем относительно планеты пространстве.

§ 6. Разложение силовой функции взаимного притяжения двух конечных тел

1. Рассмотрим два тела, T_1 и T_2 , совершенно произвольных по своей внешней форме и внутреннему строению. Пусть M_i ($i=1,2$) есть текущая точка тела T_i , в которой сосредоточена элементарная притягивающая масса

$$dm_i = \delta_i(M_i) dT_i,$$

где $\delta_i(M_i)$ — плотность тела T_i (линейная, поверхностная или объемная), а dT_i обозначает пространственный элемент тела (элемент дуги, площади поверхности или объема соответственно).

Полагая

$$\overline{M_1 M_2} = \Delta,$$

мы имеем следующее общее выражение для взаимной силовой функции двух тел:

$$U = f \int_{(T_1)} \int_{(T_2)} \frac{dm_1 dm_2}{\Delta}, \quad (5.73)$$

где интегрирование распространяется на обе притягивающие массы и, следовательно, кратность интеграла k удовлетворяет условию

$$2 \leq k \leq 6.$$

Как было уже установлено в гл. I, величина, определяемая формулой (5.73), зависит от положения и ориентации каждого из двух тел относительно некоторой абсолютной (т. е. не связанной ни с одним из двух тел T_1 и T_2) системы координат, или, если угодно, от положения и ориентации одного тела относительно другого.