Поэтому условие $a \leqslant \sqrt{2}c$ может быть также записано в следующем виде:

$$\alpha \leqslant 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}2928932.$$

Известно, что каждая из больших планет солнечной системы по внешнему виду весьма похожа на эллипсоид вращения, полярная ось которого меньше экваториальной. Сжатие каждой из этих планет весьма мало́ и во всяком случае меньше указанного предела.

Поэтому силовую функцию каждой из больших планет можно приближенно представить рядом (5.66), сходящимся во всем внешнем относительно планеты пространстве.

§ 6. Разложение силовой функции взаимного притяжения двух конечных тел

1. Рассмотрим два тела, T_1 и T_2, совершенно произвольных по своей внешней форме и внутреннему строению. Пусть M_i $(i=1,2)$ есть текущая точка тела T_i, в которой сосредоточена элементарная притягивающая масса

$$dm_i = \delta_i(M_i)\,dT_i,$$

где $\delta_i(M_i)$ — плотность тела T_i (линейная, поверхностная или объемная), а dT_i обозначает пространственный элемент тела (элемент дуги, площади поверхности или объема соответственно).

Полагая

$$\overline{M_1M_2} = \Delta,$$

мы имеем следующее общее выражение для взаимной силовой функции двух тел:

$$U = f\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)} \frac{dm_1\,dm_2}{\Delta}, \tag{5.73}$$

где интегрирование распространяется на обе притягивающие массы и, следовательно, кратность интеграла k удовлетворяет условию

$$2 \leqslant k \leqslant 6.$$

Как было уже установлено в гл. I, величина, определяемая формулой (5.73), зависит от положения и ориентации каждого из двух тел относительно некоторой абсолютной (т. е. не связанной ни с одним из двух тел T_1 и T_2) системы координат, или, если угодно, от положения и ориентации одного тела относительно другого.

Обозначим, как и в гл. I, через ξ_i, η_i, ζ_i координаты точки G_i, жестко связанной с телом T_i, и через ψ_i, ϑ_i, φ_i — углы Эйлера, определяющие ориентацию «собственной» системы координат с началом в точке G_i относительно абсолютных осей. Тогда силовая функция есть некоторая функция от 12 независимых переменных

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \psi_1,\ \vartheta_1,\ \varphi_1,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2,\ \psi_2,\ \vartheta_2,\ \varphi_2, \tag{5.74}$$

производные первого порядка от которой дают составляющие сил притяжения, действующих на рассматриваемые тела, а также составляющие моментов этих сил относительно центров приведения G_1 и G_2.

Полезно заметить еще раз, что центр приведения тела T_i, т. е. точка G_i, может быть выбран совершенно произвольно (лишь бы точка G_i была жестко связана с телом) и может даже и не принадлежать телу T_i. В частности, за эту точку G_i можно взять центр инерции (центр масс) тела T_i, который вообще будем обозначать через C_i.

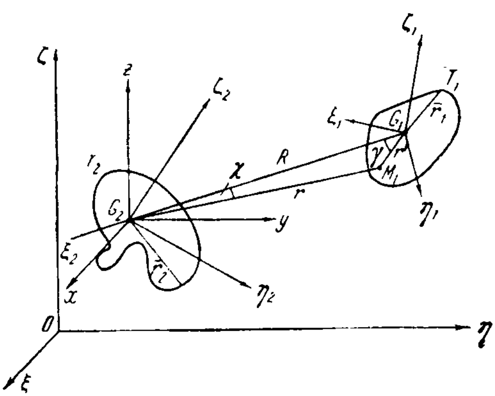

Рис. 38.

Задача, которую мы будем здесь рассматривать, заключается в нахождении явного выражения для силовой функции в зависимости от величин (5.74) или каких-либо других величин, им эквивалентных. Так как получить такое явное выражение в конечном виде в общем случае, очевидно, невозможно, то задача приводится к представлению функции U при помощи бесконечного ряда того или иного вида.

Указанное разложение силовой функции взаимного притяжения двух тел может быть получено, например, на основании такого же принципа, как и разложение силовой функции тела на материальную точку, рассмотренное в предыдущих параграфах.

Установим форму этого разложения и приведем его первые члены *).

Для упрощения выкладок возьмем начало главной системы координат в точке G_2, оставляя направления координатных осей

---

*) Мы проведем выкладки более подробно, чем это сделано в классическом трактате Тиссерана или в курсе механики Д. Бобылева. См. также Д. Брауэр, Дж. Клеменс, Методы небесной механики, перев. с англ., «Мир», 1964.

параллельными соответствующим направлениям абсолютных осей*) (рис. 38).

Обозначим через x, y, z координаты текущей точки M_1 тела T_1 в этой системе координат и положим еще

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Перепишем теперь формулу (5.73) следующим образом:

$$U=f\int\limits_{(T_1)} dm_1 \int\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta}=\int\limits_{(T_1)} U_2(M_1)\,dm_1, \tag{5.73'}$$

где положено

$$U_2(M_1)=f\int\limits_{(T_2)}\frac{dm_2}{\Delta}. \tag{5.75}$$

Очевидно, что $U_2(M_1)$ есть силовая функция тела T_2 на материальную частицу единичной массы, помещенную в текущей точке M_1 тела T_1.

Предполагая, что тела T_1 и T_2 не имеют никакой общей части и что расстояние между их центрами приведения G_1 и G_2 больше наибольшего из линейных размеров обоих тел, мы можем определить функцию $U_2(M_1)$ разложением типа (5.20) и написать

$$U_2(M_1)=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(2)}(x, y, z)}{r^{2n+1}}, \tag{5.75'}$$

где $U_n^{(2)}(x, y, z)$ — гармонические многочлены относительно координат точки M_1, коэффициенты которых зависят от эйлеровых углов ψ_2, ϑ_2, φ_2 тела T_2.

Так как

$$x=x_1'-\xi_2, \quad y=y_1'-\eta_2, \quad z=z_1'-\zeta_2,$$

где буквы со штрихом обозначают абсолютные координаты точки M_1, то величины $U_2^{(2)}(x, y, z)$ можно рассматривать как многочлены относительно абсолютных координат точки G_2, коэффициенты которых зависят от эйлеровых углов тела T_2.

Рассмотрим теперь треугольник $G_1M_1G_2$, в котором сторона $\overline{M_1G_2}$ есть r (см. рис. 38). Положим еще

$$R=\overline{G_1G_2}, \quad r'=\overline{M_1G_1}, \quad \gamma=L(\overrightarrow{G_1G_2}, \overrightarrow{G_1M_1});$$

тогда

$$r^2=R^2+r'^2-2Rr'\cos\gamma,$$

*) Следует отметить, что главная система координат с началом в точке G_2 не совпадает с «собственной» системой координат тела T_2, начало которой также находится в точке G_2.

и мы можем написать

$$\frac{1}{r^{2n+1}}=\frac{1}{R^{2n+1}}\left[1-2\frac{r'}{R}\cos\gamma+\frac{r'^2}{R^2}\right]^{-n-\frac{1}{2}} \tag{5.76}$$

Поэтому

$$U_2(M_1)=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(2)}(x, y, z)}{R^{2n+1}}\left[1-2\frac{r'}{R}\cos\gamma+\frac{r'^2}{R^2}\right]^{-n-\frac{1}{2}} \tag{5.75''}$$

Внося это разложение в формулу (5.73), мы представим разложение силовой функции U в следующем виде:

$$U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(1,2)}}{R^{2n+1}}. \tag{5.77}$$

Здесь R есть расстояние между центрами приведения тел T_1 и T_2, которое в произвольной абсолютной системе координат определяется формулой

$$R=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2},$$

а $U_n^{(1,2)}$ суть некоторые многочлены относительно абсолютных координат точек G_1 и G_2. Коэффициенты этих многочленов зависят от эйлеровых углов обоих тел *).

Разложение (5.77) сходится и представляет силовую функцию взаимного притяжения двух тел в области, определяемой неравенством

$$R>\bar{r}_1+\bar{r}_2,$$

где

$$\bar{r}_1=\max(\overline{G_1M_1}),\quad \bar{r}_2=\max(\overline{G_2M_2}).$$

Коэффициенты ряда (5.77) определяются формулой

$$U_n^{(1,2)}=\int\limits_{(T_1)}\frac{U_n^{(2)}(x, y, z)\,dm_1}{\left(1-2\frac{r'}{R}\cos\gamma+\frac{r'^2}{R^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{5.78}$$

при помощи которой они и могут быть вычислены. Для этого вычисления нужно прежде всего разложить в ряд выражение (5.76), а затем произвести соответствующие интегрирования.

2. Ограничимся нахождением нескольких первых членов разложения силовой функции, предполагая, что расстояние R настолько велико по сравнению с $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, что членами выше треть-

*) Само собой разумеется, что эти коэффициенты зависят также от параметров, определяющих формы тел T_1, T_2 и их внутреннее строение.

его порядка относительно обратного расстояния $1/R$ можно пренебречь.

По формулам (5.34), (5.35) и (5.37) мы находим

$$U_0^{(2)}(x, y, z) = m_2,$$
$$U_1^{(2)}(x, y, z) = m_2(\bar{\xi}_2 x + \bar{\eta}_2 y + \bar{\zeta}_2 z),$$
$$U_2^{(2)}(x, y, z) = \frac{r^2}{2}\left[A_2 + B_2 + C_2 - 3I_2'\right],$$

где m_2 есть масса тела T_2; $\bar{\xi}_2$, $\bar{\eta}_2$, $\bar{\zeta}_2$ — координаты его центра инерции в системе координат с началом в G_2; A_2, B_2, C_2 — его моменты инерции относительно тех же осей и I_2' — его момент инерции относительно прямой $\overline{G_2M_1}$.

Заметим, что если центр приведения G_2 взят в центре инерции тела T_2, то $\bar{\xi}_2 = \bar{\eta}_2 = \bar{\zeta}_2$ и, следовательно, $U_1^{(2)}(x, y, z) \equiv 0$.

Теперь формула (5.78) дает

$$\frac{U_0^{(1,2)}}{R} = \frac{m_2}{R}\int\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{\left(1 - 2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \frac{r'^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = m_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{r}.$$

Для вычисления этого интеграла мы можем отнести тело T_1 к собственной системе координат с началом в точке G_1, а тогда ясно, что написанное выражение представляет собой силовую функцию тела T_1 на материальную частицу с массой m_2/f, находящуюся в точке G_2. Следовательно, если ξ, η, ζ суть координаты G_1 относительно G_2, то $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ суть координаты G_2 относительно G_1 (оси обеих систем, по условию, параллельны), и мы будем иметь, применяя опять формулы (5.34), (5.35) и (5.37),

$$\frac{U_0^{(1,2)}}{R} = \frac{m_2 m_1}{R} + \frac{m_2 m_1}{R^3}\left(-\xi\bar{\xi}_1' - \eta\bar{\eta}_1' - \zeta\bar{\zeta}_1'\right) + \\ + \frac{m_2}{2R^3}\left[A_1 + B_1 + C_1 - 3I_1\right] + \ldots; \quad (5.79)$$

здесь m_1 есть масса тела T_1; $\bar{\xi}_1'$, $\bar{\eta}_1'$, $\bar{\zeta}_1'$ — координаты его центра инерции в системе осей с началом в точке G_1; A_1, B_1, C_1 — его моменты инерции относительно тех же осей и I_1 — его момент инерции относительно прямой $\overline{G_2G_2}$.

Если за центр приведения тела T_1 взят его центр инерции, то $\bar{\xi}_1' = \bar{\eta}_1' = \bar{\zeta}_1' = 0$ и второй член в правой части формулы (5.79) обращается в нуль. Далее имеем, если $U_1^{(2)} \neq 0$,

$$\frac{U_1^{(1,2)}}{R^3} = \int\limits_{(T_1)} \frac{U_1^{(2)}(x, y, z)\, dm_1}{r^3} =$$

$$= m_2\bar{\xi}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{x\, dm_1}{r^3} + m_2\bar{\eta}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{y\, dm_1}{r^3} + m_2\bar{\zeta}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{z\, dm_1}{r^3}.$$

Переходя опять к собственной для тела T_1 системе координат, мы имеем, например,

$$\int\limits_{(T_1)} \frac{x\, dm_1}{r^3} = \int\limits_{(T_1)} \frac{(\xi_1' + \xi)\, dm_1}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{r}.$$

Аналогично можем представить и два других интеграла, что позволяет написать следующую формулу:

$$\frac{U_1^{(1,2)}}{R^3} = -\bar{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right) - \bar{\eta}_2 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right) - \bar{\zeta}^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right). \quad (5.80)$$

Входящие сюда производные легко находятся из (5.79), причем при дифференцировании нужно иметь в виду, что

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Наконец, для $n=2$ имеем

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^5} = \int\limits_{(T_1)} \frac{U_2^{(2)}(x, y, z)\, dm_1}{r^5} = \frac{1}{2} \int\limits_{(T_1)} \frac{(A_2 + B_2 + C_2 - 3I_2')\, dm_1}{r^3},$$

а ограничиваясь, как было условлено, членами третьей степени относительно $1/R$ (см. (5.76)), мы найдем

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^5} = \frac{1}{2R^3}\left[m_1(A_2 + B_2 + C_2) - 3\int\limits_{(T_1)} I_2'\, dm_1\right].$$

Но

$$I_2' = I_2 \cos^2 \chi,$$

где χ есть угол между направлением $\overrightarrow{G_2M_1}$ и направлением $\overrightarrow{G_2G_1}$, а так как, по условию, размеры тела T_1 весьма малы по сравнению с расстоянием R, то для любой точки M_1 тела T_1 этот угол также весьма мал, а поэтому с принятой степенью точности

$$\int\limits_{(T_1)} I_2'\, dm_1 = \int\limits_{(T_1)} I_2 \cos^2 \alpha\, dm_1 \cong m_1 I_2,$$

где I_2 есть момент инерции тела T_2 относительно прямой $\overrightarrow{G_1G_2}$. Поэтому можем написать

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^5} \cong m_1 \frac{A_2 + B_2 + C_2 - 3I_2}{2R^3}. \tag{5.81}$$

Выпишем теперь окончательное приближенное выражение для силовой функции, принимая притом для большего упрощения центры инерции тел T_1 и T_2 за их центры приведения.

Тогда формулы (5.79)—(5.81) дают

$$U = f\frac{m_1 m_2}{R} + f m_1 \frac{A_2 + B_2 + C_2 - 3I_2}{2R^3} + \\ + f m_2 \frac{A_1 + B_1 + C_1 - 3I_1}{2R^3} + \ldots \tag{5.82}$$

Заметим, что если за оси собственных систем координат тел T_1 и T_2 взяты главные оси инерции этих тел, то величины A_i, B_i, C_i суть главные центральные моменты инерции тела T_i, а момент инерции I_i относительно прямой $\overline{G_1G_2}$, проходящей через центры инерции двух тел, определится формулой

$$I_i = A_i \alpha_i^2 + B_i \beta_i^2 + C_i \gamma_i^2,$$

где α_i, β_i, γ_i суть косинусы углов, образуемых прямой $\overline{G_1G_2}$ с главными центральными осями инерции тела T_i $(i=1,2)$. Вспоминая выражения для направляющих косинусов осей собственной системы тела T_i с абсолютными осями (см. формулы (1.27) гл. I) и имея в виду, что направляющие косинусы прямой $\overline{G_1G_2}$ суть

$$\frac{\xi_2 - \xi_1}{R}, \quad \frac{\eta_2 - \eta_1}{R}, \quad \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{R},$$

мы найдем следующие выражения для α_i, β_i, γ_i:

$$\alpha_i = (\cos\psi_i \cos\varphi_i - \sin\psi_i \sin\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{\xi_2 - \xi_1}{R} + \\ + (\sin\psi_i \cos\varphi_i + \cos\psi_i \sin\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{\eta_2 - \eta_1}{R} + \sin\varphi_i \sin\vartheta_i \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{R},$$

$$\beta_i = (-\cos\psi_i \sin\varphi_i - \sin\psi_i \cos\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{\xi_2 - \xi_1}{R} + \\ + (-\sin\psi_i \sin\varphi_i + \cos\psi_i \cos\varphi_i \cos\vartheta_i)\frac{\eta_2 - \eta_1}{R} + \cos\varphi_i \sin\vartheta_i \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{R},$$

$$\gamma_i = \sin\psi_i \sin\vartheta_i \frac{\xi_2 - \xi_1}{R} - \cos\psi_i \sin\vartheta_i \frac{\eta_2 - \eta_1}{R} + \cos\vartheta_i \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{R},$$

где

$$R = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}.$$

если тела T_1 и T_2 отнесены к абсолютной системе координат, и $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, если одно тело, например T_1, отнесено к системе координат, связанной с другим телом.

Ввиду выражений для моментов инерции I_i и направляющих косинусов (5.83), функция U, определяемая формулой (5.82), является явной функцией от переменных (5.74), и дифференцирование этой функции по переменным (5.74) даст выражения составляющих сил притяжения, действующих на тела T_1, T_2 и выражения для моментов этих сил.

Если расстояние R очень велико по сравнению с $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, то мы можем ограничиться в формуле (5.82) только одним первым членом и тогда получим

$$U=f\frac{m_1m_2}{R}, \tag{5.82'}$$

что опять показывает, что два тела, находящиеся на достаточно большом взаимном расстоянии, притягиваются друг к другу почти так же, как притягивались бы две материальные точки, помещенные в центрах приведения этих тел, массы которых равны m_1 и m_2.

3. Возвратимся теперь к формулам (5.77), (5.78) и покажем, как можно построить разложение функции U в общем виде.

Для этого рассмотрим сначала вкратце некоторое обобщение многочленов Лежандра, принадлежащее Гегенбауеру *).

Рассмотрим вместо производящей функции $\Phi(x, \alpha)$ многочленов Лежандра (см. формулу (4.31') гл. IV) следующую функцию

$$G^{(n)}(x, \alpha)=(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-n-\frac{1}{2}}, \tag{5.83}$$

где n есть целое положительное число, x по-прежнему обозначает косинус некоторого угла, а $|\alpha|<1$.

Можно доказать (на чем для сокращения мы останавливаться не будем) **), что при этих условиях функция (5.83) разложима в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по степеням параметра α.

Этот ряд представим следующим образом:

$$G^{(n)}(x, \alpha)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p G_p^{(n)}(x), \tag{5.84}$$

*) См. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 2, перев. с англ., ГТТИ, 1934 (2-е изд., 1965), а также Г. Н. Дубошин, Разложение обратного расстояния в теории притяжения, Прикл. матем. и мех., т. X, 1946.

**) Доказательство сходимости ряда (5.84) проводится совершенно так же, как и доказательство сходимости ряда, представляющего производящую функцию $\Phi(x,\alpha)$ многочленов Лежандра. Действительно, функция (5.83) имеет те же особые точки, что и функция (4.31'), причем очевидно, что $G^{(0)}(x,\alpha)\equiv\Phi(x,\alpha)$.

и покажем, что его коэффициенты являются многочленами p-й степени относительно x, которые называются многочленами Гегенбауэра и частным случаем которых являются многочлены Лежандра.

Для доказательства воспользуемся рекуррентной формулой для коэффициентов $G_p^{(n)}(x)$, вполне аналогичной такой же формуле для многочленов Лежандра. Дифференцируя равенство (5.84) по параметру α, имеем

$$(2n+1)(x-\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-n-\frac{3}{2}} = \sum_{p=0}^{\infty} p\alpha^{p-1} G_p^{(n)}(x),$$

что можно написать также в виде

$$(2n+1)(x-\alpha)\sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p G_p^{(n)}(x) = (1-2\alpha x+\alpha^2)\sum_{p=0}^{\infty} p\alpha^{p-1} G_p^{(n)}(x).$$

Приравнивая теперь коэффициенты при α^p в левой и правой частях равенства, мы найдем после приведений искомую рекуррентную формулу

$$(p+1)\,G_{p+1}^{(n)}(x) = (2n+2p+1)\,xG_p^{(n)}(x) - (2n+p)\,G_{p-1}^{(n)}(x). \quad (5.85)$$

Но, с другой стороны, коэффициенты $G_p^{(n)}(x)$ можно рассматривать как коэффициенты разложения функции (5.83) в ряд Тейлора, т. е. можно написать

$$G_p^{(n)}(x) = \frac{1}{p!}\left[\frac{d^p G^{(n)}(x,\alpha)}{d\alpha^p}\right]_{\alpha=0}.$$

Полагая $p=0$ и $p=1$, находим отсюда

$$G_0^{(n)}(x) = 1, \quad G_1^{(n)}(x) = (2n+1)\,x,$$

после чего формула (5.85) даст последовательно все остальные коэффициенты, и мы видим, что действительно $G_p^{(n)}(x)$ есть многочлен p-й степени относительно x, содержащий только четные степени x, если p есть число четное, и только нечетные степени x, если p есть число нечетное.

Применяя формулу (5.85), найдем последовательно

$$G_2^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)\,x^2 - \frac{1}{2}(2n+1),$$

$$G_3^{(n)}(x) = \frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)(2n+5)\,x^3 - \frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)\,x,$$

и так далее. Применяя метод индукции к рекуррентной формуле (5.85), нетрудно также вывести общую формулу для многочленов $G_p^{(n)}(x)$.

Мы имеем

$$G_p^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)} x^{p-2s}, \tag{5.86}$$

где $G_{ps}^{(n)}$ суть числовые коэффициенты, определяемые формулой

$$G_{ps}^{(n)} = (-1)^s \frac{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2p-2s-1)}{2^s s!\,(p-2s)!}. \tag{5.87}$$

Используя теперь полученные формулы, мы можем представить формулу (5.76) в следующем виде:

$$\frac{1}{r^{2n+1}} = \frac{1}{R^{2n+1}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{R}\right)^p G_p^{(n)}(\cos\gamma), \tag{5.88}$$

а коэффициенты $U_n^{(1,2)}$ разложения (5.77), определяемые формулой (5.78), представятся в виде

$$U_n^{(1,2)} = \sum_{p=0}^{\infty} \int\limits_{(T_1)} U_n^{(2)}(x, y, z) \left(\frac{r'}{R}\right)^p G_p^{(n)}(\cos\gamma)\, dm_1. \tag{5.89}$$

Так как

$$\begin{aligned} r'R\cos\gamma &= -\xi(x-\xi) - \eta(y-\eta) - \zeta(z-\zeta) = \\ &= R^2 - \xi x - \eta y - \zeta z, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} r'^p R^p G_p^{(n)}(\cos\gamma) &= \sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)} (r'R\cos\gamma)^{p-2s} r'^{2s} R^{2s} = \\ &= \sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)} (R^2 - \xi x - \eta y - \zeta z)^{p-2s} r'^{2s} R^{2s} = U_{np}^{(1)}(x, y, z), \end{aligned}$$

и мы можем переписать формулу (5.89) в следующем виде:

$$U_n^{(1,2)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{U_{np}^{(1,2)}}{R^{2p}}, \tag{5.89'}$$

где

$$U_{np}^{(1,2)} = \int\limits_{(T_1)} U_n^{(2)}(x, y, z)\, U_{np}^{(1)}(x, y, z)\, dm_1. \tag{5.90}$$

Очевидно, что подынтегральная функция в формуле (5.90) есть некоторый многочлен относительно координат текущей точки M_1 тела T_1, а поэтому вычисление коэффициентов (5.90) сводится к интегрированию многочленов и не представляет никаких затруднений.

§ 7. О разложении силовой функции по функциям Ламе

В заключение этой главы сделаем несколько общих замечаний о возможности разложения силовой функции какого-либо тела на материальную точку единичной массы в ряд, коэффициенты которого выражаются через эллипсоидальные функции Ламе (см. § 10 гл. IV).

Возьмем начало координат O в центре инерции притягивающего тела T и выберем некоторый эллипсоид (E), центр которого совпадает с началом координат, а главные оси — с соответствующими направлениями координатных осей.

Силовая функция тела T на точку P единичной массы определяется формулой (5.10), где сферические функции — «игреки Лапласа» даются формулой (5.9).

Но, как показано в § 10 гл. IV, сферическая функция выражается суммой произведений Ламе, а поэтому формулу (5.10) можно написать также в виде

$$U(P) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(\mu, \nu)}{n+1}. \tag{5.91}$$

Чтобы определить коэффициенты этого разложения, заменим в формуле (5.9) многочлен Лежандра $P_n(\cos\gamma)$ его выражением (4.110), приведенным в конце гл. IV. Тогда мы получим

$$U_n(\mu, \nu) = \sum_{s=1}^{2n+1} U_n^s E_n^s(\mu) E_n^s(\nu), \tag{5.92}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$U_n^s = \frac{\pi}{2(2n+1)} \int_{(T)} r'^n E_n^s(\mu') E_n^s(\nu')\, dm. \tag{5.93}$$

Ясно, что коэффициенты U_n^s также являются некоторыми характерными для тела T постоянными, которые можно вывести из постоянных A_{nk}, B_{nk} или же из моментов инерции различных порядков.

Радиус-вектор r точки P можно заменить его выражением (4.93) или (4.93') через эллипсоидальные координаты λ, μ, ν,