Очевидно, что подынтегральная функция в формуле (5.90) есть некоторый многочлен относительно координат текущей точки M_1 тела T_1, а поэтому вычисление коэффициентов (5.90) сводится к интегрированию многочленов и не представляет никаких затруднений.

§ 7. О разложении силовой функции по функциям Ламе

В заключение этой главы сделаем несколько общих замечаний о возможности разложения силовой функции какого-либо тела на материальную точку единичной массы в ряд, коэффициенты которого выражаются через эллипсоидальные функции Ламе (см. § 10 гл. IV).

Возьмем начало координат O в центре инерции притягивающего тела T и выберем некоторый эллипсоид (E), центр которого совпадает с началом координат, а главные оси — с соответствующими направлениями координатных осей.

Силовая функция тела T на точку P единичной массы определяется формулой (5.10), где сферические функции — «игреки Лапласа» даются формулой (5.9).

Но, как показано в § 10 гл. IV, сферическая функция выражается суммой произведений Ламе, а поэтому формулу (5.10) можно написать также в виде

$$U(P) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(\mu, \nu)}{n+1}. \tag{5.91}$$

Чтобы определить коэффициенты этого разложения, заменим в формуле (5.9) многочлен Лежандра $P_n(\cos\gamma)$ его выражением (4.110), приведенным в конце гл. IV. Тогда мы получим

$$U_n(\mu, \nu) = \sum_{s=1}^{2n+1} U_n^s E_n^s(\mu)\, E_n^s(\nu), \tag{5.92}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$U_n^s = \frac{\pi}{2(2n+1)}\int\limits_{(T)} r'^n E_n^s(\mu')\, E_n^s(\nu')\, dm. \tag{5.93}$$

Ясно, что коэффициенты U_n^s также являются некоторыми характерными для тела T постоянными, которые можно вывести из постоянных A_{nk}, B_{nk} или же из моментов инерции различных порядков.

Радиус-вектор r точки P можно заменить его выражением (4.93) или (4.93′) через эллипсоидальные координаты λ, μ, ν, и тогда формула (5.91) напишется в виде

$$U(P)=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(\mu,\nu)}{\left(r_0^2+\lambda\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{5.91'}$$

Если эллипсоид относимости (E) выбран достаточно близким к внешней поверхности тела и точка P близка к телу, то координата λ будет иметь малое числовое значение и функцию

$$\left(r_0^2+\lambda\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

можно разложить в ряд, расположенный по степеням λ.

В этом случае разложение силовой функции представится в виде

$$U(P)=f\sum_{n=0}^{\infty}L_n^*(\mu,\ \nu)\cdot\lambda^n, \tag{5.94}$$

где коэффициенты зависят только от координат μ и ν.