ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ОБЩАЯ ЗАДАЧА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ГЛАВА VI
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА

Из курса теоретической механики известно, что изучение движений каких-либо неизменяемых тел, находящихся под действием заданных сил, приводится обычно к составлению и интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Неизвестными функциями в этих уравнениях, называемых *дифференциальными уравнениями движения*, являются некоторые величины (параметры), определяющие положения и скорости тел относительно какой-либо выбранной подходящим образом системы отсчета (системы координат) *).

Задача интегрирования заключается в нахождении этих величин в зависимости от времени и надлежащего числа произвольных постоянных так, чтобы все уравнения движения были удовлетворены и чтобы были выполнены также заданные начальные условия.

Когда такое интегрирование математически возможно, то мы получаем формулы (*конечные уравнения движения*), позволяющие вычислять числовые значения параметров для любого момента времени, а также устанавливать общие свойства и законы изучаемого движения.

Однако строгое интегрирование удается выполнить только в немногих исключительных случаях, а обычно уравнения движения оказываются *неинтегрируемыми*, и тогда можно ставить вопрос лишь о их приближенном решении или о численном интегрировании. При этом весьма важную роль играет удачный выбор системы отсчета и параметров, или координат, которые должны быть определены как функции времени и начальных условий.

---

*) Термин «параметр» не имеет строго установленного значения. Это, вообще, некоторая величина, могущая иметь и постоянное и переменное значения, характеризующая положение тела (или системы) или его структуру.

Иногда в процессе решения задачи приходится переходить от одной системы отсчета к какой-либо другой, почему-либо более выгодной, и заменять первоначально выбранные параметры другими, более удобными или более простыми. Иначе говоря, дифференциальные уравнения движения постоянно приходится подвергать некоторым преобразованиям, заменяя старые переменные какими-то новыми, связанными с первоначальными заданными формулами преобразования.

Вообще говоря, такие преобразования (или подстановки) приводят к сложным и громоздким выкладкам, а поэтому, естественно, следует отыскивать такие формы уравнений движения и такие законы преобразований, которые позволили бы упростить и сократить эти выкладки и связанные с ними вычисления. Это удается осуществить, если уравнения движения записаны в особой форме, называемой лагранжевой, и особенно, когда их удается привести к так называемому каноническому виду (гамильтонова форма). В последнем случае можно осуществить множество преобразований, не изменяющих канонического вида уравнений.

Эти преобразования (канонические преобразования или преобразования прикосновения) играют в небесной механике важную роль, а поэтому мы начнем изложение предмета с рассмотрения этого вопроса.

§ 1. Уравнения Лагранжа второго рода

1. Рассмотрим задачу о движении системы свободных материальных точек M_0, M_1, ..., M_n, находящихся под действием заданных сил. Пусть m_i есть масса точки M_i и ξ_i, η_i, ζ_i — ее прямоугольные декартовы координаты в некоторой абсолютной системе отсчета ($i=0, 1, 2, \ldots, n$).

Обозначим через Ξ_i, H_i, Z_i составляющие (проекции на координатные оси) равнодействующей всех сил, действующих на точку M_i.

Эти величины являются заданными функциями времени t, координат ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1, ..., ξ_n, η_n, ζ_n и их первых производных по времени $\dot\xi_0$, $\dot\eta_0$, $\dot\zeta_0$, $\dot\xi_1$, $\dot\eta_1$, $\dot\zeta_1$, ..., $\dot\xi_n$, $\dot\eta_n$, $\dot\zeta_n$.

Для упрощения записи мы введем для этих величин, а также и для других функций многих переменных сокращенные обозначения. Всякую функцию F времени, координат и составляющих скоростей всех точек нашей материальной системы мы будем изображать следующим образом:

$$F = F(t \,|\, \xi, \ \eta, \ \zeta \,|\, \dot\xi, \ \dot\eta, \ \dot\zeta).$$

Функцию от времени и координат (не содержащую составляющих скоростей!) и функцию только от координат мы будем обозначать соответственно так:

$$F = F(t \mid \xi, \eta, \zeta), \quad F = F(\xi, \eta, \zeta).$$

Разумеется, в случае надобности, например, когда функция зависит от координат только некоторых точек системы, мы будем пользоваться также и более подробными обозначениями.

В принятых сокращенных обозначениях дифференциальные уравнения движения рассматриваемой материальной системы могут быть написаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \Xi_i\left(t \mid \xi, \eta, \zeta \mid \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right), \\ m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= \mathrm{H}_i\left(t \mid \xi, \eta, \zeta \mid \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right), \\ m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= \mathrm{Z}_i\left(t \mid \xi, \eta, \zeta \mid \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right), \\ &(i = 0, 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

или, еще более просто,

$$m_i \ddot{\xi}_i = \Xi_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \mathrm{H}_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \mathrm{Z}_i.$$

Может случиться, что действующие силы обладают *силовой функцией*, т. е. что существует такая функция $U(t \mid \xi, \eta, \zeta)$, не зависящая от составляющих скоростей (она может не зависеть также и от времени t), частные производные которой по координатам точки M_i равны соответствующим составляющим силы, действующей на эту точку. Тогда

$$\Xi_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \mathrm{H}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \mathrm{Z}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i},$$

и уравнения (6.1) принимают вид

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \tag{6.1'}$$

Система (6.1) состоит из $3n+3$ дифференциальных уравнений второго порядка, и неизвестными функциями в ней являются координаты точек M_i. Рассматривая составляющие скоростей точек M_i так же как неизвестные функции, мы можем заменить систему (6.1) равносильной ей системой $6n+6$ дифференциальных уравнений первого порядка, которая запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \dot{\xi}_i, & m_i \frac{d\dot{\xi}_i}{dt} &= \Xi_i, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= \dot{\eta}_i, & m_i \frac{d\dot{\eta}_i}{dt} &= \mathrm{H}_i, \\ \frac{d\zeta_i}{dt} &= \dot{\zeta}_i, & m_i \frac{d\dot{\zeta}_i}{dt} &= \mathrm{Z}_i. \end{aligned}\right\} \tag{6.1''}$$

Общее решение системы (6.1″) определяет координаты и составляющие скоростей точек M_i как функции времени и $6n+6$ произвольных постоянных интегрирования, которые могут быть выражены через начальные значения этих функций, соответствующих некоторому определенному моменту времени t_0, который называется начальным моментом или эпохой*).

В этой главе мы будем обозначать начальное значение какой-либо величины ξ через ξ^0, так что полная система начальных данных для системы (6.1) запишется так:

$$\begin{gathered}
\xi_i^0=\xi_i(t_0),\quad \eta_i^0=\eta_i(t_0),\quad \zeta_i^0=\zeta_i(t_0);\\
\dot\xi_i^0=\dot\xi_i(t_0),\quad \dot\eta_i^0=\dot\eta_i(t_0),\quad \dot\zeta_i^0=\dot\zeta_i(t_0)\\
(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{gathered}$$

Тогда общее решение системы (6.1) или системы (6.1″) представится равенствами вида

$$\left.\begin{aligned}
\xi_i&=\xi_i(t\,|\,\xi^0,\ \eta^0,\ \zeta^0\,|\,\dot\xi^0,\ \dot\eta^0,\ \dot\zeta^0),\quad \dot\xi_i=\dot\xi_i(t\,|\,\xi^0,\eta^0,\zeta^0\,|\,\dot\xi^0,\dot\eta^0,\dot\zeta^0),\\
\eta_i&=\eta_i(t\,|\,\xi^0,\ \eta^0,\ \zeta^0\,|\,\dot\xi^0,\ \dot\eta^0,\ \dot\zeta^0),\quad \dot\eta_i=\dot\eta_i(t\,|\,\xi^0,\eta^0,\zeta^0\,|\,\dot\xi^0,\dot\eta^0,\dot\zeta^0),\\
\zeta_i&=\zeta_i(t\,|\,\xi^0,\ \eta^0,\ \zeta^0\,|\,\dot\xi^0,\ \dot\eta^0,\ \dot\zeta^0),\quad \dot\zeta_i=\dot\zeta_i(t\,|\,\xi^0,\eta^0,\zeta^0\,|\,\dot\xi^0,\dot\eta^0,\dot\zeta^0)\\
&\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\}\quad(6.2)$$

Если правые части уравнений (6.1) удовлетворяют некоторым достаточно общим условиям, то обычные теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений обеспечивают существование единственного решения системы (6.1), удовлетворяющего заданным начальным условиям и определенного для всех значений времени, заключенных в некотором промежутке, включающем начальный момент t_0.

Может случиться также (и такие случаи представляют для небесной механики особенно важное значение), что формулы (6.2) определяют решение системы (6.1) для всех действительных значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Вместо общего решения системы (6.1) или (6.1″) мы будем рассматривать часто общий интеграл этой системы, т. е. совокупность $6n+6$ независимых между собой уравнений вида

$$F_j(t\,|\,\xi,\ \eta,\ \zeta\,|\,\dot\xi,\ \dot\eta,\ \dot\zeta)=C_j=\text{const}\quad (j=1,2,\ \ldots,\ 6n+6),\qquad(6.2')$$

*) «Начальную эпоху» t_0 можно выбирать, по существу, совершенно произвольно. В конкретных задачах механики этот выбор диктуется обычно практическими требованиями задачи.

обращающихся в тождества после подстановки вместо величин ξ_i, η_i, ζ_i, $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$ функций времени, удовлетворяющих уравнениям (6.1).

Каждое из равенств вида (6.2′) называется **первым интегралом** системы (6.1) или (6.1″), и характеризуется тем, что его полная производная по времени, взятая в силу уравнений (6.1″), равна тождественно нулю, так что имеем следующие тождества:

$$\frac{\partial F_j}{\partial t}+\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\partial F_j}{\partial \xi_i}\dot{\xi}_i+\frac{\partial F_j}{\partial \eta_i}\dot{\eta}_i+\frac{\partial F_j}{\partial \zeta_i}\dot{\zeta}_i+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial F_j}{\partial \dot{\xi}_i}\Xi_i+\frac{\partial F_j}{\partial \dot{\eta}_i}\mathrm{H}_i+\frac{\partial F_j}{\partial \dot{\zeta}_i}\mathrm{Z}_i\right)\right]\equiv 0.$$

Можно сказать также, что общий интеграл системы (6.1) или (6.1″) представляет собой совокупность $6n+6$ независимых первых интегралов этой системы.

Признаком независимости первых интегралов (6.2″) является, как известно, неравенство нулю определителя Якоби (якобиана) системы $6n+6$ функций F_j от $6n+6$ независимых переменных ξ_i, η_i, ζ_i, $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, причем t рассматривается как величина постоянная. Это условие может быть записано в следующей краткой форме*):

$$D=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{6n+6})}{D(\xi, \eta, \zeta\,|\,\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})}\neq 0.$$

Заметим, что, полагая в формулах (6.2′) $t=t_0$, мы получим

$$C_j=F_j(t_0\,|\,\xi^0, \eta^0, \zeta^0\,|\,\dot{\xi}^0, \dot{\eta}^0, \dot{\zeta}^0), \tag{6.2″}$$

что дает выражения для произвольных постоянных в зависимости от начальных условий. Наоборот, решая уравнения (6.2″) относительно величин ξ_i^0, η_i^0, ζ_i^0, $\dot{\xi}_i^0$, $\dot{\eta}_i^0$, $\dot{\zeta}_i^0$, что возможно ввиду неравенства якобиана D нулю, мы можем выразить начальные значения через произвольные постоянные, что кратко записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_i^0&=\xi_i(t_0\,|\,C), & \dot{\xi}_i^0&=\dot{\xi}_i(t_0\,|\,C),\\ \eta_i^0&=\eta_i(t_0\,|\,C), & \dot{\eta}_i^0&=\dot{\eta}_i(t_0\,|\,C),\\ \zeta_i^0&=\zeta_i(t_0\,|\,C), & \dot{\zeta}_i^0&=\dot{\zeta}_i(t_0\,|\,C). \end{aligned}$$

*) D есть определитель $6n+6$-го порядка, элементами которого служат частные производные функций F_j по всем координатам и составляющим скоростей точек системы.

2. Введем теперь вместо переменных ξ_i, η_i, ζ_i некоторые другие переменные $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k=3n+3)$, связанные с абсолютными координатами определенными соотношениями (формулами преобразования), которые могут также содержать время t.

В сокращенной записи формулы преобразования переменных могут быть представлены в виде

$$\xi_i=\xi_i(t\,|\,q),\quad \eta_i=\eta_i(t\,|\,q),\quad \zeta_i=\zeta_i(t\,|\,q). \tag{6.3}$$

Допустим, что правые части этих равенств суть заданные непрерывные и однозначные функции своих аргументов, так что при заданном t всякой системе значений величин $q_1, \ldots, q_k$ соответствует единственная система значений абсолютных координат, т. е. определенное положение нашей материальной системы.

Тогда положение системы точек M_i однозначно определяется значениями величин q_j, которые, следовательно, играют такую же роль, как и абсолютные координаты и также могут быть названы координатами. Эти величины q_j называются в механике *обобщенными координатами* или *переменными Лагранжа*.

Выведем дифференциальные уравнения, определяющие переменные Лагранжа. Для этого помножим уравнения (6.1) соответственно на $\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ и сложим все полученные равенства. Мы получим k уравнений следующего вида:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\ddot{\xi}_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\ddot{\eta}_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\ddot{\zeta}_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\Xi_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\mathrm{H}_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\mathrm{Z}_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right).$$

Имея в виду очевидные тождества

$$\ddot{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)-\dot{\xi}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)$$

и полагая для сокращения

$$P_j=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\dot{\eta}_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\dot{\zeta}_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right),$$

$$Q_j=\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\dot{\xi}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}\right)+\dot{\eta}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}\right)+\dot{\zeta}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right)\right],$$

$$R_j=\sum_{i=0}^{n}\left(\Xi_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\mathrm{H}_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\mathrm{Z}_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right),$$

мы перепишем предыдущие уравнения в следующем простом виде:

$$\frac{dP_j}{dt} - Q_j = R_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{6.4}$$

Теперь выразим величины P_j, Q_j, R_j через время, обобщенные координаты и их первые производные по t (обобщенные скорости).

Для этого подставим в выражения для P_j, Q_j, R_j вместо абсолютных координат их выражения (6.3) и вместо составляющих абсолютных скоростей следующие их значения, получаемые полным дифференцированием формул преобразования по времени:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \dot{\eta}_i &= \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \dot{\zeta}_i &= \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Результат этой подстановки можно представить в очень простом виде. Действительно, рассмотрим полную *живую силу* T нашей системы, определяемую в абсолютных координатах формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2). \tag{6.6}$$

С помощью формул (6.5) мы получим выражение живой силы в переменных Лагранжа:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i \left\{ \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 + \left[\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 \right\}. \tag{6.6'}$$

Отсюда видно, что T есть многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$, который удобно представить в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{6.7}$$

где T_s ($s=2, 1, 0$) есть однородный многочлен степени s относительно величин $\dot{q}$.

Очевидно, мы можем написать

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{s,\, j=1}^{k} A_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_{j=1}^{k} B_j \dot{q}_j,$$

где

$$A_{sj} = A_{js} = \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_s} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \eta_i}{\partial q_s} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_s} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right),$$

$$B_j = \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} \right).$$

Кроме того,

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i \left[\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Если формулы преобразования (6.3) не содержат время t, то, как легко видеть, $T_1 = T_0 = 0$, и живая сила T есть однородный многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$, так что мы можем написать

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{s,\, j=1}^{k} A_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j.$$

Покажем теперь, что

$$P_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad Q_j = \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Действительно, дифференцируя (6.6) частным образом по $\dot{q}_j$, мы имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\dot{\xi}_i \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \dot{\eta}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \dot{\zeta}_i}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

С другой стороны, дифференцируя по $\dot{q}_j$ соотношения (6.5), получим

$$\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{\eta}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{\zeta}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j},$$

вследствие чего находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \right) \equiv P_j.$$

Дифференцируя затем (6.6) частным образом по q_j, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\dot{\xi}_i \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial q_j} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \dot{\eta}_i}{\partial q_j} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \dot{\zeta}_i}{\partial q_j} \right).$$

Чтобы найти производные от составляющих скоростей, продифференцируем по q_j формулы (6.5), что дает, например,

$$\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t\, \partial q_j} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s\, \partial q_j} \dot{q}_s.$$

Дифференцируя теперь (6.3) по q_j и беря затем полные производные по t, мы найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_j\, \partial t} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_j\, \partial q_s} \dot{q}_s.$$

Предполагая формулы преобразования (6.3) такими, чтобы правые их части обладали непрерывными частными производными первого и второго порядков, мы будем иметь

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t\, \partial q_j} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_j\, \partial t}, \qquad \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s\, \partial q_j} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_j\, \partial q_s},$$

вследствие чего найдем

$$\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}\right), \qquad \frac{\partial \dot{\eta}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial q_j}\right), \qquad \frac{\partial \dot{\zeta}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j}\right),$$

а поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=0}^{n} m_i \left[\dot{\xi}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}\right) + \dot{\eta}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial q_j}\right) + \dot{\zeta}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j}\right) \right] \equiv Q_j.$$

Таким образом, уравнения (6.4) напишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = R_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{6.8}$$

где T определяется формулой (6.6′), и величины R_j предполагаются выраженными через t, q и $\dot{q}$.

Уравнения (6.8) называются *уравнениями Лагранжа второго рода* или просто *уравнениями Лагранжа*. Величины R_j определяются действующими силами и называются поэтому *обобщенными силами*, хотя размерности этих величин могут и не совпадать с размерностями сил.

Уравнения Ланrранжа позволяют весьма просто переходить от абсолютных координат к каким-либо другим переменным, а также непосредственно составлять уравнения движения, определяющие заданные параметры q_j.

Если, в частности, действующие силы обладают силовой функцией U, то составление уравнений Лагранжа еще более упрощается. В самом деле, тогда мы имеем

$$\Xi_l=\frac{\partial U}{\partial \xi_l},\quad \mathrm{H}_l=\frac{\partial U}{\partial \eta_l},\quad \mathrm{Z}_l=\frac{\partial U}{\partial \zeta_l},$$

вследствие чего

$$R_j=\sum_{l=0}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_l}\frac{\partial \xi_l}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial \eta_l}\frac{\partial \eta_l}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial \zeta_l}\frac{\partial \zeta_l}{\partial q_j}\right)\equiv\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

и уравнения (6.8) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).\tag{6.8$'$}$$

3. Покажем теперь, что уравнения (6.8) разрешимы относительно вторых производных от обобщенных координат. Действительно, составляя производные от живой силы, мы имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{s=1}^{k}A_{sj}\dot{q}_s+B_j,$$

а подставляя эти выражения в уравнения (6.8), мы приведем их к следующему виду:

$$\sum_{s=1}^{k}A_{sj}\ddot{q}_s=G_j(t\,|\,q\,|\,\dot{q})\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k),\tag{6.8$''$}$$

где G_j — известные функции своих переменных.

Уравнения (6.8″) представляют собой систему линейных неоднородных уравнений относительно величин $\ddot{q}$, определитель которой обозначим через A:

$$A=|\,A_{sj}\,|.$$

Этот определитель заведомо не равен нулю. Действительно, заменяя величины A_{sj} их выражениями и воспользовавшись известными правилами сложения и умножения определителей, мы найдем

$$A=(m_0m_1\ \ldots\ m_n)^3\cdot D^2,$$

где

$$D=\frac{D(\xi\,|\,\eta\,|\,\zeta)}{D(q)}$$

есть якобиан функций (6.3).

Так как было предположено, что обобщенные координаты однозначно определяют положение рассматриваемой материальной системы, то соотношения (6.3), связывающие старые и новые переменные, должны быть между собою независимыми, а поэтому якобиан функций ξ, η, ζ от k независимых переменных q должен быть отличен от нуля.

Но при $D \neq 0$ также и $A \neq 0$ и, следовательно, уравнения (6.8″) разрешимы относительно вторых производных и дают для них единственные значения.

Решая систему (6.8″), мы получим уравнения движения в следующем виде:

$$\ddot{q}_j = \Phi_j(t \,|\, q \,|\, \dot{q}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где Φ_j суть известные функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Наконец, предыдущие уравнения можно представить в виде равносильной системы $2k$ уравнений первого порядка:

$$\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j, \quad \frac{d\dot{q}_j}{dt} = \Phi_j(t \,|\, q \,|\, \dot{q}).$$

Решая эти уравнения, мы получим обобщенные координаты и обобщенные скорости как функции от t и $2k$ произвольных постоянных, за которые могут быть приняты начальные значения q^0 обобщенных координат и $\dot{q}^0$ обобщенных скоростей, соответствующих начальному моменту t_0.

Это решение представится в виде

$$q_j = q_j(t \,|\, q^0 \,|\, \dot{q}^0), \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(t \,|\, q^0 \,|\, \dot{q}^0),$$

после чего нетрудно уже найти и абсолютные координаты и составляющие скоростей по формулам (6.3) и (6.5).

4. Уравнения Лагранжа могут быть применены не только для определения движения системы материальных точек, но и в более сложных задачах механики, например, для определения движения системы неизменяемых тел. В последнем случае «состояние» системы определяется не только координатами центров приведения тел, но и эйлеровыми углами, определяющими их ориентацию. Поэтому полезно привести более общий вывод уравнений (6.8), основываясь на каком-либо общем, основном принципе механики. Рассмотрим такой вывод на основании интегрального принципа Остроградского — Гамильтона.

Пусть имеем какую-нибудь материальную систему без неинтегрируемых дифференциальных связей и *с конечным числом степеней свободы*.

Тогда, если число степеней свободы есть k, то «состояние» системы может быть однозначно определено k независимыми между собою параметрами — *обобщенными координатами*:

$$q_1, q_2, \ldots, q_k.$$

Пусть $T(t|q|\dot{q})$ есть живая сила рассматриваемой материальной системы, являющаяся непрерывной функцией времени t, обобщенных координат q и обобщенных скоростей $\dot{q}$ и обладающая непрерывными частными производными первого и второго порядков.

Представим себе, что движение материальной системы происходит под действием сил, обладающих силовой функцией U, являющейся непрерывной функцией времени и обобщенных координат q *), имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Положим

$$L = T + U. \tag{6.9}$$

Очевидно, что $L(t|q|\dot{q})$, называемая функцией Лагранжа, непрерывна и обладает непрерывными частными производными первого и второго порядков.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t|q|\dot{q})\,dt, \tag{6.10}$$

называемый обычно действием по Гамильтону.

Принцип Остроградского — Гамильтона утверждает, что действительное движение материальной системы отличается от всех других возможных ее движений тем, что оно удовлетворяет необходимому условию экстремума гамильтонова действия.

При этом предполагается, что начальное (для $t=t_0$) и конечное (для $t=t_1$) состояния системы одинаковы для всех ее движений (т. е. и для действительного и для всех возможных движений). Иными словами, начальные значения q^0, $\dot{q}^0$ координат и скоростей и конечные их значения q^1, $\dot{q}^1$ неизменны для всех движений.

Необходимым условием экстремума интеграла I является, как известно из вариационного исчисления **), равенство нулю его первой вариации δI, т. е. мы должны иметь

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(t|q|\dot{q})\,dt = 0.$$

*) Разумеется, все рассматриваемые здесь функции от t, q и $\dot{q}$ обладают требуемыми свойствами, вообще, в некотором промежутке изменения t (который может быть и бесконечным) и в некоторой области изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей. Подробности см. в книге: Уинтнер, Аналитические основы небесной механики, перев. с англ., «Наука», 1967.

**) См., например, М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Основы вариационного исчисления, ОНТИ, 1935, и Г. К. Суслов, Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944. См. также А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

Вычисляя вариацию по правилам вариационного исчисления, мы находим

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j \right] \right\} dt.$$

Для преобразования этого выражения заметим, что, так как время t не варьируется, то операции варьирования и дифференцирования по времени переместительны. В самом деле, обозначая через $\tilde{q}$ варьированное значение функции q, имеем

$$\delta q = \tilde{q} - q.$$

Взяв от обеих частей этого равенства производные, получим

$$\frac{d(\delta q)}{dt} = \dot{\tilde{q}} - \dot{q}.$$

Но разность $\dot{\tilde{q}} - \dot{q}$ представляет вариацию производной от функции q по t, т. е. $\delta \dot{q}$, а следовательно,

$$\frac{d(\delta q)}{dt} = \delta \frac{dq}{dt},$$

что и требовалось показать.

На основании сказанного мы можем написать

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d(\delta q_j)}{dt} dt = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q \, dt.$$

По условию, начальные и конечные положения системы одинаковы во всех ее движениях, т. е. вариации δq_j обобщенных координат равны нулю при $t = t_0$ и $t = t_0$; поэтому имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \, dt,$$

и выражение для вариации функционала I можно представить в следующем виде:

$$\delta I = - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j \right\} dt. \tag{6.11}$$

Так как промежуток интегрирования (t_0, t_1) совершенно произволен, то из равенства интеграла нулю в формуле (6.11) следует равенство нулю подынтегрального выражения, т. е. мы должны иметь

$$\sum_{j=1}^{k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Но вариации обобщенных координат произвольны и между собой независимы. Поэтому предыдущая сумма может быть равна нулю только в том случае, когда коэффициент при каждой вариации в отдельности есть нуль. Поэтому в действительном движении рассматриваемой материальной системы обобщенные координаты q должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{6.12}$$

которые представляют собой просто иную форму уравнений Лагранжа.

В самом деле, из (6.9) мы имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

так что уравнения (6.12) могут быть также написаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{6.12'}$$

а это и есть уравнения Лагранжа в форме (6.8′), т. е. в случае, когда существует силовая функция U, зависящая только от времени и от обобщенных координат q.

Подобным же образом можно вывести уравнения Лагранжа и из какого-либо другого принципа механики.

§ 2. Первые интегралы уравнений Лагранжа

1. Уравнения Лагранжа представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и, вообще говоря, не допускают интегралов, выражающихся через известные функции или через квадратуры от известных функций.

Однако можно указать некоторые, весьма немногие, но важные для приложений случаи, когда такие интегралы существуют и выводятся из дифференциальных уравнений весьма легко.

Рассмотрим случай, когда живая сила материальной системы определяется формулой (6.7) и не зависит явно от времени t. Пусть, кроме того, действующие силы обладают силовой функцией, также не зависящей явно от времени. Тогда уравнения (6.12) имеют интеграл

$$T_2-T_0-U=h=\text{const},$$

также не содержащий времени явно.