Но вариации обобщенных координат произвольны и между собой независимы. Поэтому предыдущая сумма может быть равна нулю только в том случае, когда коэффициент при каждой вариации в отдельности есть нуль. Поэтому в действительном движении рассматриваемой материальной системы обобщенные координаты q должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{6.12}$$

которые представляют собой просто иную форму уравнений Лагранжа.

В самом деле, из (6.9) мы имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

так что уравнения (6.12) могут быть также написаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{6.12$'$}$$

а это и есть уравнения Лагранжа в форме (6.8′), т. е. в случае, когда существует силовая функция U, зависящая только от времени и от обобщенных координат q.

Подобным же образом можно вывести уравнения Лагранжа и из какого-либо другого принципа механики.

§ 2. Первые интегралы уравнений Лагранжа

1. Уравнения Лагранжа представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и, вообще говоря, не допускают интегралов, выражающихся через известные функции или через квадратуры от известных функций.

Однако можно указать некоторые, весьма немногие, но важные для приложений случаи, когда такие интегралы существуют и выводятся из дифференциальных уравнений весьма легко.

Рассмотрим случай, когда живая сила материальной системы определяется формулой (6.7) и не зависит явно от времени t. Пусть, кроме того, действующие силы обладают силовой функцией, также не зависящей явно от времени. Тогда уравнения (6.12) имеют интеграл

$$T_2-T_0-U=h=\text{const},$$

также не содержащий времени явно.

Действительно, помножим уравнения (6.12′) соответственно на $\dot{q}_j$ и сложим все уравнения; мы получим

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Но очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^{k} \ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},$$

и предыдущее равенство напишется в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^{k} \left(\ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{6.12″}$$

Но формула (6.7) дает

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j},$$

а так как T_2 и T_1 суть однородные функции величин $\dot{q}$ второго и первого измерений соответственно, то по теореме Эйлера об однородных функциях мы имеем

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = 2T_2, \quad \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = T_1,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T_2 + T_1.$$

Далее, в силу независимости T и U от времени мы имеем

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = \frac{dT}{dt}, \quad \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{dU}{dt},$$

вследствие чего равенство (6.12″) примет вид

$$\frac{d(2T_2 + T_1)}{dt} - \frac{d(T_2 + T_1 + T_0)}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

откуда интегрированием получаем

$$T_2 - T_0 = U + h, \tag{6.13}$$

где h обозначает постоянную интегрирования.

Интеграл (6.13) назовем **обобщенным интегралом Якоби**. Если $T_1=T_0=0$, так что живая сила $T=T_2$ и есть однородная функция второй степени относительно величин $\dot{q}$, то равенство (6.13) принимает вид

$$T=U+h \tag{6.14}$$

и называется **интегралом живой силы**.

Последнее равенство можно написать еще в виде

$$T+(-U)=h, \tag{6.14'}$$

откуда ясно его механическое значение. В самом деле, живая сила T определяет кинетическую энергию системы, а $-U$ — ее потенциальную энергию, так что уравнение (6.14′) устанавливает неизменность полной энергии системы во все время движения. По этой причине равенство (6.14) или (6.14′) называется еще **интегралом энергии**.

Такое движение материальной системы, во время которого ее полная энергия не изменяется, называется, как известно, **консервативным**.

2. Рассмотрим теперь случай, когда живая сила системы и ее силовая функция не зависят от какой-нибудь одной из координат q, которая называется в таком случае **циклической координатой**. Не нарушая общности, мы можем считать, что циклической координатой является q_1. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial U}{\partial q_1}=0,$$

и из уравнений (6.12) или (6.12′) мы находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=c_1, \tag{6.15}$$

или

$$A_{11}\dot{q}_1+A_{21}\dot{q}_2+\ldots+A_{k1}\dot{q}_k+B_1=c_1, \tag{6.15'}$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Очевидно, что равенство (6.15) или (6.15′) является интегралом системы (6.12), в рассматриваемом случае линейным относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$. С помощью этого интеграла из уравнений (6.12′) можно исключить величину $\dot{q}_1$.

Тогда уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ k) \tag{6.12'''}$$

образуют систему $2k$—2-го порядка с неизвестными функциями $q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_k$ и, следовательно, порядок первоначальной системы понижен на две единицы.

Если система (6.12‴) проинтегрирована, то из соотношения (6.15′) мы найдем оставшуюся функцию q_1 — циклическую координату — простой квадратурой.

Подобным же образом, если переменные $q_1, q_2, \ldots, q_r$ $(r<k)$ являются циклическими координатами, то мы получим r линейных интегралов типа (6.15), с помощью которых можем понизить порядок системы на $2r$ единиц. После интегрирования преобразованной системы $2k—2r$-го порядка мы найдем все циклические координаты при помощи r квадратур.

При помощи интеграла живой силы или обобщенного интеграла Якоби также можно, конечно, понизить порядок системы уравнений Лагранжа, но так как соотношения (6.13) и (6.14) не являются линейными относительно величин $\dot{q}$, то осуществить это понижение порядка на деле крайне затруднительно, а если все же провести это преобразование, то новые уравнения получатся весьма громоздкими, вследствие чего понижение порядка не доставляет никаких преимуществ.

3. Никаких других интегралов в общем случае уравнения Лагранжа не допускают, но можно указать некоторые частные случаи, в которых возможно даже найти полную систему интегралов уравнений (6.12), т. е. проинтегрировать эту систему до конца.

Один из таких случаев указан Лиувиллем. Так как теорема Лиувилля часто находит применение в задачах небесной механики, то мы ее здесь рассмотрим.

Теорема Лиувилля. Если живая сила системы и ее силовая функция определяются формулами вида

$$2T = B\sum_{j=1}^{k} A_j(q_j)\,\dot{q}_j^2, \quad U = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{k} U_j(q_j), \tag{6.16}$$

где

$$B = \sum_{j=1}^{k} B_j(q_j),$$

то уравнения Лагранжа интегрируются в **квадратурах***).

Приведем наиболее простое доказательство этой важной теоремы, данное Пенлеве.

Положим

$$du_j = \sqrt{A_j(q_j)}\,dq_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{6.17}$$

*) Здесь каждая из функций $A_j(q_j)$, $B_j(q_j)$, $U_j(q_j)$ зависит только от одной координаты q_j. Точно так же G_j и F_j зависят каждая только от u_j.

Это равенство устанавливает связь между обобщенной координатой q_j и соответствующей новой переменной u_j. Предполагая, что q_j выражено через u_j, мы можем положить

$$B_j(q_j) = G_j(u_j), \quad U_j(q_j) = F_j(u_j);$$

тогда формулы (6.16) запишутся в виде

$$2T = G\sum_{j=1}^{k} \dot{u}_j^2, \quad U = \frac{F}{G} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} F_j(u_j)}{\sum\limits_{j=1}^{k} G_j(u_j)}.$$

Будем рассматривать теперь величины u_j как новые обобщенные координаты и напишем для них уравнения Лагранжа. Мы имеем

$$\frac{d}{dt}(G\dot{u}_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_j}\sum_{j=1}^{k} \dot{u}_j^2 = \frac{\partial U}{\partial u_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \quad (6.18)$$

Так как T и U не зависят явно от времени и живая сила содержит только квадраты новых обобщенных скоростей $\dot{u}_j$, то уравнения (6.18) имеют интеграл живой силы

$$T = \frac{1}{2} G\sum_{j=1}^{k} \dot{u}_j^2 = U + h, \qquad (6.18')$$

где h — произвольная постоянная.

Умножив теперь каждое равенство (6.18) на $2G\dot{u}_j$ и имея в виду (6.18′), мы получим

$$\frac{d}{dt}(G^2\dot{u}_j^2) - 2\dot{u}_j\frac{\partial G}{\partial u_j}(U + h) = 2\dot{u}_j G\frac{\partial U}{\partial u_j},$$

или

$$\frac{d}{dt}(G^2\dot{u}_j^2) = 2\dot{u}_j\frac{\partial G(U + h)}{\partial u_j}.$$

Далее, так как $GU = F$, имеем

$$\frac{d}{dt}(G^2\dot{u}_j^2) = 2\dot{u}_j\frac{\partial(F + hG)}{\partial u_j} = 2\dot{u}_j\frac{d(F_j + hG_j)}{du_j},$$

или

$$\frac{d(G^2\dot{u}_j^2)}{dt} = 2\frac{d(F_j + hG_j)}{dt}.$$

Интегрируя эти равенства, найдем

$$G^2\dot{u}_j^2 = 2(F_j + hG_j + \alpha_j), \qquad (6.19)$$

где α_j — произвольные постоянные.

Эти постоянные не независимы. Действительно, складывая равенства (6.19), мы находим

$$\sum_{j=1}^{k} G^2\dot{u}_j^2 = 2GT = 2\sum_{j=1}^{k}(F_j + hG_j + \alpha_j) =$$
$$= 2F + 2hG + 2\sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 2G(U+h) + 2\sum_{j=1}^{k}\alpha_j.$$

Сравнение полученного равенства с интегралом живой силы (6.18) приводит к соотношению

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 0$$

между произвольными постоянными α.

Далее, из (6.19) имеем

$$\frac{du_j}{\sqrt{F_j + hG_j + \alpha_j}} = \frac{\sqrt{2}\,dt}{G}.$$

Умножая каждое из этих равенств на G_j и складывая, мы получим

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{G_j\,du_j}{\sqrt{F_j + hG_j + \alpha_j}} = \sqrt{2}\,dt. \tag{6.20}$$

Возвращаясь теперь к переменным q, мы можем написать равенства (6.19) и (6.20) в следующем виде:

$$B^2A_j(q_j)\dot{q}_j^2 = 2\Psi_j(q_j) \tag{6.19'}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k} B_j\sqrt{\frac{A_j}{\Psi_j}}\,dq_j = \sqrt{2}\,dt, \tag{6.20'}$$

где положено для сокращения

$$\Psi_j(q_j) = U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j,$$

так что эта функция также зависит только от одной переменной.

Интегрируя (6.19′) после исключения из них dt и (6.20′), мы получим полную систему первых интегралов уравнений Лагранжа в случае Лиувилля в следующем виде:

$$\int\sqrt{\frac{A_1(q_1)}{\Psi_1(q_1)}}\,dq_1 + \beta_1 = \ldots = \int\sqrt{\frac{A_k(q_k)}{\Psi_k(q_k)}}\,dq_k + \beta_k, \tag{6.21}$$

$$\sqrt{2}(t-\tau) = \sum_{j=1}^{k}\int B_j(q_j)\sqrt{\frac{A_j(q_j)}{\Psi_j(q_j)}}\,dq_j. \tag{6.22}$$

Независимыми произвольными постоянными в этих формулах являются величины

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, \ldots, & \alpha_{k-1}, & h, \\ \beta_1, & \beta_2, \ldots, & \beta_{k-1}, & \tau, \end{matrix}$$

число которых равно $2k$, т. е. порядку системы. Поэтому равенства (6.21) и (6.22) представляют общий интеграл уравнений Лагранжа в случае Лиувилля. Следовательно, теорема доказана.

§ 3. Примеры использования уравнений Лагранжа

Рассмотрим некоторые простые примеры на применение уравнений Лагранжа.

1. Пусть мы имеем задачу о движении одной материальной точки под действием силы, составляющие которой по осям абсолютной системы координат суть Ξ, H, Z. Если m есть масса точки, то дифференциальные уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$m\ddot{\xi} = \Xi, \quad m\ddot{\eta} = \mathrm{H}, \quad m\ddot{\zeta} = \mathrm{Z}. \qquad (6.23)$$

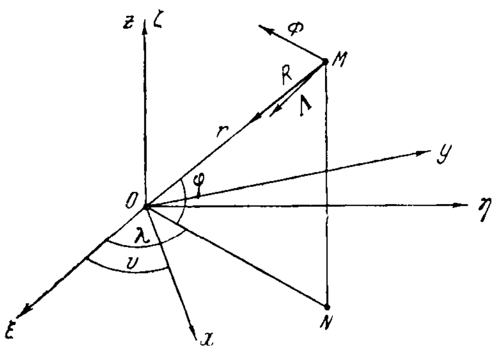

Рис. 39.

Введем теперь вместо прямоугольных координат ξ, η, ζ полярные сферические r, φ, λ, где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ есть радиус-вектор точки, φ — широта и λ — долгота (рис. 39).

Чтобы получить выражение для живой силы

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) \qquad (6.24)$$

в сферических координатах, дифференцируем сначала формулы преобразования, что дает

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{r} \cos\varphi \cos\lambda - r\dot{\varphi} \sin\varphi \cos\lambda - r\dot{\lambda} \cos\varphi \sin\lambda, \\ \dot{\eta} &= \dot{r} \cos\varphi \sin\lambda - r\dot{\varphi} \sin\varphi \sin\lambda + r\dot{\lambda} \cos\varphi \cos\lambda, \\ \dot{\zeta} &= \dot{r} \sin\varphi + r\dot{\varphi} \cos\varphi, \end{aligned}$$

после чего находим

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda}^2). \qquad (6.25)$$