Независимыми произвольными постоянными в этих формулах являются величины

$$\begin{array}{llll}\alpha_1, & \alpha_2, \ldots, & \alpha_{k-1}, & h,\\ \beta_1, & \beta_2, \ldots, & \beta_{k-1}, & \tau,\end{array}$$

число которых равно $2k$, т. е. порядку системы. Поэтому равенства (6.21) и (6.22) представляют общий интеграл уравнений Лагранжа в случае Лиувилля. Следовательно, теорема доказана.

§ 3. Примеры использования уравнений Лагранжа

Рассмотрим некоторые простые примеры на применение уравнений Лагранжа.

1. Пусть мы имеем задачу о движении одной материальной точки под действием силы, составляющие которой по осям абсолютной системы координат суть Ξ, H, Z. Если m есть масса точки, то дифференциальные уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$m\ddot\xi=\Xi,\quad m\ddot\eta=H,\quad m\ddot\zeta=Z. \tag{6.23}$$

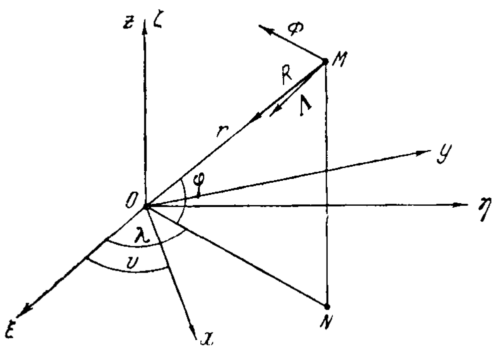

Рис. 39.

Введем теперь вместо прямоугольных координат ξ, η, ζ полярные сферические r, φ, λ, где $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ есть радиус-вектор точки, φ — широта и λ — долгота (рис. 39).

Чтобы получить выражение для живой силы

$$T=\frac{1}{2}m(\dot\xi^2+\dot\eta^2+\dot\zeta^2) \tag{6.24}$$

в сферических координатах, дифференцируем сначала формулы преобразования, что дает

$$\begin{aligned}\dot\xi&=\dot r\cos\varphi\cos\lambda-r\dot\varphi\sin\varphi\cos\lambda-r\dot\lambda\cos\varphi\sin\lambda,\\ \dot\eta&=\dot r\cos\varphi\sin\lambda-r\dot\varphi\sin\varphi\sin\lambda+r\dot\lambda\cos\varphi\cos\lambda,\\ \dot\zeta&=\dot r\sin\varphi+r\dot\varphi\cos\varphi,\end{aligned}$$

после чего находим

$$T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+r^2\cos^2\varphi\cdot\dot\lambda^2). \tag{6.25}$$

Примем за обобщенные координаты — сферические, полагая *)

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \lambda.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial r} = mr(\dot{\varphi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2\varphi),$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -mr^2\dot{\lambda}^2 \sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = mr^2\dot{\lambda}\cos^2\varphi, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{\partial T}{\partial \lambda} = 0.$$

Подставляя эти значения частных производных в уравнения Лагранжа (6.8), мы получим дифференциальные уравнения движения точки в сферических координатах:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi &= \frac{1}{m}R_1, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) + r^2\dot{\lambda}^2 \sin\varphi\cos\varphi &= \frac{1}{m}R_2, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\lambda}\cos^2\varphi) &= \frac{1}{m}R_3. \end{aligned}\right\} \tag{6.25'}$$

Выражения для обобщенных сил найдутся по формулам § 1, которые дают

$$R_1 = \Xi\cos\varphi\cos\lambda + \mathrm{H}\cos\varphi\sin\lambda + \mathrm{Z}\sin\varphi = R,$$
$$R_2 = r[\Xi(-\sin\varphi\cos\lambda) + \mathrm{H}(-\sin\varphi\sin\lambda) + \mathrm{Z}\cos\varphi] = r\Phi,$$
$$R_3 = r\cos\varphi[\Xi(-\sin\lambda) + \mathrm{H}\cos\lambda + \mathrm{Z}\cdot 0] = r\cos\varphi\cdot\Lambda,$$

где R — проекция силы на направление радиуса-вектора движущейся точки, Λ — проекция силы на направление, перпендикулярное к плоскости, проходящей через радиус-вектор и ось аппликат (ось $O\zeta$), и, наконец, Φ — проекция силы на направление, перпендикулярное к двум предыдущим (см. рис. 39).

Если существует силовая функция $U(t, r, \varphi, \lambda)$, то, как мы уже знаем,

$$R_1 = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad R_2 = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad R_3 = \frac{\partial U}{\partial \lambda}.$$

В случае, когда силовая функция не зависит явно от времени, уравнения (6.25′) имеют интеграл живой силы

$$T = U + h,$$

*) Таким образом, производные $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\lambda}$ суть обобщенные скорости.

а если силовая функция не зависит к тому же от долготы λ, то последняя является циклической координатой (так как T также не зависит от λ) и уравнения (6.25′) имеют еще один интеграл

$$r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda} = c,$$

называемый обычно «интегралом площадей» *).

2. В качестве второго примера рассмотрим преобразование тех же уравнений движения (6.23) к вращающейся системе координат. Пусть ось аппликат новой системы координат совпадает с осью аппликат старой системы, а новая ось абсцисс образует с осью $O\xi$ угол v, который будем считать известной функцией времени. Тогда переход к новым координатам x, y, z определится формулами (см. рис. 39)

$$\xi = x \cos v - y \sin v, \quad \eta = x \sin v + y \cos v, \quad \zeta = z,$$

откуда дифференцированием находим производные

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{x} \cos v - \dot{y} \sin v - \dot{v}(x \sin v + y \cos v), \\ \dot{\eta} &= \dot{x} \sin v + \dot{y} \cos v + \dot{v}(x \cos v - y \sin v), \\ \dot{\zeta} &= \dot{z}, \end{aligned}$$

и выражение живой силы T в новых координатах

$$T = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\dot{v}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{v}^2(x^2 + y^2)]. \qquad (6.26)$$

Возьмем за обобщенные координаты величины x, y, z, т. е. положим

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

Выражения для частных производных от живой силы T будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m(\dot{x} - \dot{v}y), & \frac{\partial T}{\partial x} &= m\dot{v}(\dot{y} + \dot{v}x), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m(\dot{y} + \dot{v}x), & \frac{\partial T}{\partial y} &= m\dot{v}(-\dot{x} + \dot{v}y), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z}, & \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

---

*) Интеграл площадей не зависит от силовой функции и может иметь место и в общем случае. Для его существования достаточно только, чтобы Λ была равна нулю, т. е. чтобы направление действующей силы лежало в плоскости OMN (см. рис. 39).

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа (6.8), мы получим уравнения движения точки во вращающихся осях:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}-2\dot{v}\dot{y}-\dot{v}^2x-\ddot{v}y&=\frac{1}{m}R_1,\\ \ddot{y}+2\dot{v}\dot{x}-\dot{v}^2y+\ddot{v}x&=\frac{1}{m}R_2,\\ \ddot{z}&=\frac{1}{m}R_3, \end{aligned}\right\} \tag{6.26'}$$

где, согласно формулам § 1,

$$R_1=\Xi\cos v-\mathrm{H}\sin v=X,$$
$$R_2=\Xi\sin v+\mathrm{H}\cos v=Y,$$
$$R_3=\mathrm{Z}=Z,$$

так что X, Y, Z суть проекции силы на подвижные оси. Если существует силовая функция U, то мы имеем

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Часто встречается случай, когда новая система координат вращается вокруг оси $O\zeta$ равномерно. Тогда

$$\dot{v}=\mathrm{const}=n,\quad \ddot{v}=0,$$

и уравнения (6.26′) напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}-2n\dot{y}-n^2x&=\frac{1}{m}X,\\ \ddot{y}+2n\dot{x}-n^2y&=\frac{1}{m}Y,\\ \ddot{z}&=\frac{1}{m}Z. \end{aligned}\right\} \tag{6.26''}$$

Если в последнем случае существует силовая функция U, не зависящая явно от времени, то, так как при $\dot{v}=n$ живая сила также не зависит от времени, уравнения движения допускают интеграл

$$T_2-T_0=U+h.$$

Но по формуле (6.26)

$$T_2=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),\quad T_0=\frac{mn^2}{2}(x^2+y^2),$$

и упомянутый интеграл можно написать в виде

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\Omega+h, \tag{6.27}$$

где положено

$$\Omega=T_0+U.$$

Интеграл (6.27) называется интегралом Якоби и был получен впервые в частном случае задачи, описываемой уравнениями (6.26″), известной под названием «ограниченная задача трех тел» *).

Заметим, что если написать уравнения (6.26″) в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{1}{m}\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{1}{m}\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{6.27'}$$

то интеграл Якоби можно вывести также из этих уравнений непосредственно. В самом деле, умножая уравнения (6.27′) соответственно на $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$ и складывая, мы имеем

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\dot{z},$$

или

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{d\Omega}{dt},$$

откуда интегрированием получается интеграл Якоби (6.27). Заметим, кстати, что этот интеграл (так же как и обобщенный интеграл Якоби, рассмотренный в § 2) нельзя назвать интегралом живой силы или интегралом энергии, так как левая часть равенства (6.27) содержит только часть полной живой силы, а следовательно, интеграл Якоби не выражает принципа сохранения энергии.

Преобразуем еще систему (6.26″) к цилиндрическим координатам, присоединяя к аппликате z обычные полярные координаты на плоскости (xy), полагая

$$x = \rho\cos\lambda, \quad y = \rho\sin\lambda.$$

Тогда, как легко проверить,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\lambda},$$

и выражение для живой силы T примет вид

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2 + \dot{z}^2 + 2n\rho^2\dot{\lambda} + n^2\rho^2\right].$$

Принимая за обобщенные координаты величины ρ, λ, z, мы получим из уравнений Лагранжа следующие дифференциальные

*) См. главу VIII части второй.

уравнения:

$$\ddot{\rho}-\rho(\dot{\lambda}+n)^2=\frac{1}{m}P_1,$$
$$\frac{d}{dt}[\rho^2(\dot{\lambda}+n)]=\frac{1}{m}P_2,$$
$$\ddot{z}=\frac{1}{m}Z,$$

где обобщенные силы P_1 и P_2 определяются формулами

$$P_1=X\cos\lambda+Y\sin\lambda=P_\rho,$$
$$P_2=\rho(-X\sin\lambda+Y\cos\lambda)=\rho P_\lambda.$$

Очевидно, что P_ρ есть составляющая действующей силы по направлению, параллельному проекции радиуса-вектора на плоскость (xy), а P_λ — составляющая силы по направлению, перпендикулярному к предыдущему и лежащему также в плоскости (xy).

Если существует силовая функция U, то имеем

$$P_1=\frac{\partial U}{\partial\rho},\quad P_2=\frac{\partial U}{\partial\lambda},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

и уравнения движения напишутся в виде

$$\ddot{\rho}-\rho(\dot{\lambda}+n)^2=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\rho},$$
$$\frac{d}{dt}[\rho^2(\dot{\lambda}+n)]=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\lambda},$$
$$\ddot{z}=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial z},$$

откуда в случае независимости U от времени следует существование интеграла Якоби в виде

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\lambda}^2+\dot{z}^2-n^2\rho^2)=U+h.$$

Этими примерами мы здесь и ограничимся. В дальнейшем мы будем иметь случаи рассматривать еще другие примеры применения уравнений Лагранжа.

§ 4. Канонические уравнения и их интегралы

1. Уравнения Лагранжа представляют собой систему k совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих обобщенные координаты в функции времени и $2k$ произвольных постоянных, за которые можно принять начальные значения q^0 и $\dot{q}^0$.