уравнения:

$$\ddot{\rho}-\rho(\dot{\lambda}+n)^2=\frac{1}{m}P_1,$$
$$\frac{d}{dt}[\rho^2(\dot{\lambda}+n)]=\frac{1}{m}P_2,$$
$$\ddot{z}=\frac{1}{m}Z,$$

где обобщенные силы $P_1$ и $P_2$ определяются формулами

$$P_1=X\cos\lambda+Y\sin\lambda=P_\rho,$$
$$P_2=\rho(-X\sin\lambda+Y\cos\lambda)=\rho P_\lambda.$$

Очевидно, что $P_\rho$ есть составляющая действующей силы по направлению, параллельному проекции радиуса-вектора на плоскость $(xy)$, а $P_\lambda$ — составляющая силы по направлению, перпендикулярному к предыдущему и лежащему также в плоскости $(xy)$.

Если существует силовая функция $U$, то имеем

$$P_1=\frac{\partial U}{\partial\rho},\quad P_2=\frac{\partial U}{\partial\lambda},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

и уравнения движения напишутся в виде

$$\ddot{\rho}-\rho(\dot{\lambda}+n)^2=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\rho},$$
$$\frac{d}{dt}[\rho^2(\dot{\lambda}+n)]=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\lambda},$$
$$\ddot{z}=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial z},$$

откуда в случае независимости $U$ от времени следует существование интеграла Якоби в виде

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\lambda}^2+\dot{z}^2-n^2\rho^2)=U+h.$$

Этими примерами мы здесь и ограничимся. В дальнейшем мы будем иметь случаи рассматривать еще другие примеры применения уравнений Лагранжа.

## § 4. Канонические уравнения и их интегралы

1. Уравнения Лагранжа представляют собой систему $k$ совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих обобщенные координаты в функции времени и $2k$ произвольных постоянных, за которые можно принять начальные значения $q^0$ и $\dot{q}^0$.

Как известно, увеличивая соответствующим образом число неизвестных функций, мы всегда можем заменить эту систему равносильной ей системой $2k$ дифференциальных уравнений первого порядка.

Эту замену можно произвести различными способами, простейший из которых указан в конце § 1.

Теперь мы рассмотрим один специальный случай такого преобразования, который приведет нас к особенно удобной и симметричной форме дифференциальных уравнений движения, называемой канонической или гамильтоновой.

Рассмотрим уравнения Лагранжа в общем виде (6.8):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = R_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

и введем вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_j$ новые зависимые переменные $p_j$ при помощи формул

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{6.28}$$

Если живая сила $T$ определяется формулой типа (6.7), то $p_j$ суть линейные функции обобщенных скоростей и мы имеем

$$p_j = \sum_{s=1}^{k} A_{sj}\dot{q}_s + B_j. \tag{6.28$'$}$$

Было доказано, что определитель $A = |A_{sj}|$ не равен нулю тождественно, вследствие чего уравнения (6.28′) можно разрешить относительно $\dot{q}$, что дает

$$\dot{q}_j = \sum_{s=1}^{k} \frac{\bar{A}_{js}}{A}(p_s - B_s), \tag{6.28$''$}$$

где $\bar{A}_{js}$ обозначает алгебраическое дополнение элемента $A_{js}$ определителя $A$.

Следовательно, зная для какого-либо момента времени значения величин $q$ и $p$, мы будем знать также значения величин $q$ и $\dot{q}$, определяющих состояние системы.

Поэтому переменные

$$\left.\begin{matrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_k, \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_k, \end{matrix}\right\} \tag{6.29}$$

полностью определяют состояние системы и могут рассматриваться вместо обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Величины (6.29) будем называть **каноническими переменными** или **каноническими координатами**.

Величины $q$ по-прежнему называются обобщенными координатами, а величины $p$ называются обыкновенно **обобщенными импульсами** или просто **импульсами**.

Составим теперь дифференциальные уравнения, определяющие канонические переменные $q$ и $p$.

Прежде всего, мы имеем

$$\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j, \quad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + R_j. \tag{6.30}$$

Остается выразить правые части этих равенств через канонические переменные, для чего достаточно подставить вместо обобщенных скоростей их выражения (6.28″). Результаты этих подстановок можно представить в очень простом и симметричном виде, если ввести вспомогательную функцию $K$ при помощи формулы

$$K = \sum_{s=1}^{k} p_s\dot{q}_s - T. \tag{6.31}$$

Считая величины $\dot{q}_s$ функциями времени и канонических переменных, определяемых уравнениями (6.28) (в частности, уравнениями (6.28′)), мы можем рассматривать $K$ так же, как функцию времени и канонических переменных, а поэтому можем дифференцировать эту функцию и по $q$ и по $p$.

Выполняя эти дифференцирования, мы найдем

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^{k} p_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_j} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

и

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{s=1}^{k} p_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_j} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_j},$$

откуда в силу (6.28) и (6.30) имеем

$$\dot{q}_j = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial K}{\partial q_j},$$

вследствие чего получаем

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} + R_j. \tag{6.30′}$$

Допустим теперь, что $R_j$ являются частными производными от некоторой функции $U(t\,|\,q)$ по координатам $q_j$, т. е. что

$$R_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Полагая тогда

$$H(t \mid q \mid p) = K(t \mid q \mid p) - U(t \mid q), \tag{6.31$'$}$$

мы напишем уравнения (6.30′) следующим образом:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \tag{6.32}$$

Уравнения (6.32) и называются **каноническими уравнениями** или **уравнениями Гамильтона**, а функция $H$, определяющая аналитическую структуру правых частей этих уравнений, называется **характеристической функцией**, или **функцией Гамильтона** (иногда **гамильтонианом**).

В наиболее интересном для нас случае, когда $T$ есть живая сила некоторой материальной системы с $k$ степенями свободы, определяемая формулой (6.8), выражение для функции $K$ и соответственно для функции $H$ принимает чрезвычайно простой вид, имеющий ясный механический смысл.

Действительно, в этом случае

$$\sum_{s=1}^{k} p_s \dot{q}_s = \sum_{s=1}^{k} \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{s=1}^{k} \dot{q}_s \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s} \right) = 2T_2 + T_1,$$

и формула (6.31) дает

$$K = 2T_2 + T_1 - T = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0),$$

т. е.

$$K = T_2 - T_0. \tag{6.31$''$}$$

Если, как это часто бывает, живая сила $T$ есть однородный многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей, то $T_1 = T_0 = 0$, $T = T_2$, и мы имеем просто

$$K = T.$$

Далее, если существует силовая функция $U$, не зависящая от обобщенных скоростей, то формула (6.31′) дает

$$H = T_2 - T_0 - U, \tag{6.31$'''$}$$

а когда $T$ есть однородный многочлен второй степени, мы имеем

$$H = T - U. \tag{6.31*}$$

Таким образом, в этом последнем случае характеристическая функция $H$ есть полная энергия механической системы.

Заметим еще, что каноническую систему вида (6.32) можно, разумеется, рассматривать просто как особую форму системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не связывая ее с какой-либо механической задачей. Тогда характеристическую функцию или гамильтониан $H$ нужно рассматривать просто как некоторую заданную функцию от независимой переменной $t$ (которая вовсе не обязательно обозначает время) и от величин $q$ и $p$, являющихся неизвестными функциями.

Рассматривая каноническую систему с такой общей точки зрения, мы можем изучать свойства этих уравнений, а также свойства функций, ими определяемых, чисто математическим путем, что может оказаться полезным также и для приложений гамильтоновых систем в небесной механике.

**2.** Выразим теперь функции $K$ и $H$ через канонические переменные, предполагая, что $T$ есть живая сила некоторой материальной системы, определяемая формулой (6.8). Так как $T_0$ зависит только от $t$ и величин $q$, то в силу формулы (6.31‴) остается выразить через канонические переменные квадратичную форму $T_2$.

Воспользовавшись теоремой Эйлера, мы можем написать

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j,$$

но

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}+B_j,$$

откуда

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}=p_j-B_j,$$

и мы получаем

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(p_j-B_j)\dot{q}_j.$$

Подставляя сюда вместо $\dot{q}_j$ его выражение (6.28″), найдем окончательно

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\frac{\bar{A}_{sj}}{A}(p_j-B_j)(p_s-B_s).$$

Очевидно, что $T_2$ не будет, вообще говоря, однородным многочленом относительно импульсов $p$, но если $T_1\equiv 0$, то все $B$ также суть нули и мы имеем

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\frac{\bar{A}_{js}}{A}p_jp_s,$$

т. е. однородную функцию второй степени относительно импульсов $p$.

Найдя $T_2$, мы получим $K$ по формуле (6.31) и, в случае существования силовой функции, гамильтониан $H$ по формуле (6.31′).

Рассматривая теперь произвольную каноническую систему, покажем, что если характеристическая функция не зависит от времени, т. е. если

$$H = H(q \mid p),$$

то система (6.32) всегда имеет первый интеграл $H = \text{const}$.

Действительно, умножим уравнения (6.32) соответственно на $\dot{p}_j$ и на $\dot{q}_j$ и сложим все уравнения. Мы получим

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{dH}{dt},$$

откуда интегрированием получаем первый интеграл канонической системы (6.32)

$$H(q \mid p) = h = \text{const}. \qquad (6.33)$$

В том случае, когда уравнения (6.32) определяют движение материальной системы, обладающей силовой функцией, то $H$ определяется формулой (6.31′), и если живая сила $T$ и силовая функция $U$ не зависят от времени, то мы имеем первый интеграл

$$H \equiv T_2 - T_0 - U = h,$$

совпадающий с обобщенным интегралом Якоби уравнений Лагранжа.

Если $T$ есть однородный многочлен второй степени относительно импульсов $p$, то предыдущий интеграл принимает вид

$$H \equiv T - U = h,$$

и является интегралом энергии или живых сил.

Другой простейший тип интеграла системы (6.32) мы будем иметь в том случае, когда характеристическая функция $H$ не зависит от какой-либо из переменных $q$; действительно, если, например, $H$ не зависит от $q_1$, то

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} \equiv 0,$$

и из (6.32) следует

$$p_1 = c_1 = \text{const}.$$

Интегралы такого рода называются иногда *интегралами обобщенных кинетических моментов* или *интегралами моментов количества движения*.

Если система (6.32) описывает движение материальной системы, то $q_1$ есть циклическая координата, и указанный интеграл совпадает с интегралом (6.15) уравнений Лагранжа.

3. Вообще редко когда удается отыскать какие-либо другие интегралы канонической системы общего вида, кроме уже указанных. Однако полезно иметь в виду важное свойство интегралов канонической системы, выражаемое так называемой теоремой Пуассона.

Будем предполагать, что (6.32) есть произвольная каноническая система, характеристическая функция которой есть некоторая заданная функция канонических переменных $q$, $p$ и вообще времени $t$.

Найдем условие, при котором равенство вида

$$\Phi(q\,|\,p\,|\,t)=C \tag{6.34}$$

является одним из первых интегралов системы (6.32).

Для этого полная производная от функции $\Phi$ по $t$ в силу уравнений (6.32) должна быть равна тождественно нулю; но

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}\dot{p}_s\right),$$

а заменяя здесь $\dot{q}_s$ и $\dot{p}_s$ их выражениями из (6.32), мы получим равенство

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)=0, \tag{6.35}$$

которое и представляет собой искомое условие. Наоборот, всякая функция $\Phi(q|p|t)$, удовлетворяющая уравнению (6.35) и приравненная произвольной постоянной, доставит некоторый первый интеграл системы (6.32).

Условие (6.35) можно записать короче, воспользовавшись символом, называемым **скобкой Пуассона**.

Пусть

$$F(q\,|\,p\,|\,t),\quad \Phi(q\,|\,p\,|\,t)$$

— две произвольные функции канонических переменных и времени, однозначные и непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой области изменения независимых переменных.

**Скобкой Пуассона** от пары функций $F$ и $\Phi$ называется следующее выражение:

$$(F,\,\Phi)=\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial q_s}\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}-\frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}\right). \tag{6.36}$$

Тогда условие, что $\Phi=C$ является первым интегралом канонической системы (6.32), можно записать в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\Phi,\,H)=0. \tag{6.35'}$$

Ясно, что если $H$ не зависит от времени, то этому условию удовлетворяет сама функция $H$, т. е. равенство

$$\Phi = H(q \mid p) = \text{const}$$

есть интеграл канонической системы, что нам уже известно.

Отметим простейшие свойства скобок Пуассона, которыми нам придется здесь воспользоваться.

Прежде всего заметим, что если одна из двух функций есть величина постоянная, то скобка Пуассона равна нулю, а если функции переставить или у одной из них изменить знак, то и скобка Пуассона также изменит знак. В самом деле, из (6.36) выводим сразу

$$(F, C) = 0, \quad (\Phi, F) = -(F, \Phi), \quad (F, -\Phi) = -(F, \Phi).$$

Далее, дифференцируя (6.36) по $t$, входящему явно, мы получим без труда следующую формулу:

$$\frac{\partial (F, \Phi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \Phi\right) + \left(F, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right). \tag{6.37}$$

Получим теперь замечательное тождество, выведенное Якоби, которое имеет вид

$$(F, (\Phi, \Psi)) + (\Phi, (\Psi, F)) + (\Psi, (F, \Phi)) = 0, \tag{6.38}$$

где

$$F(q \mid p \mid t), \quad \Phi(q \mid p \mid t), \quad \Psi(q \mid p \mid t)$$

суть три произвольные функции переменных $q$, $p$ и времени, удовлетворяющие в некоторой области общим условиям непрерывности и дифференцируемости.

Чтобы доказать тождество Якоби, сделаем сначала следующее замечание. Пусть $A_j(q \mid p \mid t)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2k)$ суть какие-либо функции от канонических переменных и времени.

Положим

$$A(F) = \sum_{s=1}^{k} \left[ A_s \frac{\partial F}{\partial q_s} + A_{k+s} \frac{\partial F}{\partial p_s} \right].$$

Вводя в рассмотрение вторую систему такого же числа функций $B_j(q \mid p \mid t)$, положим также

$$B(F) = \sum_{s=1}^{k} \left[ B_s \frac{\partial F}{\partial q_s} + B_{k+s} \frac{\partial F}{\partial p_s} \right].$$

Тогда, как нетрудно проверить непосредственно, разность

$$A(B(F)) - B(A(F))$$

не содержит производных второго порядка от функции $F$.

Составим теперь три скобки Пуассона,

$$F_1 = (\Phi, \Psi), \quad \Phi_1 = (\Psi, F), \quad \Psi_1 = (F, \Phi), \tag{6.39}$$

и покажем, что сумма

$$(F, F_1) + (\Phi, F_1) + (\Psi, \Psi_1) \tag{6.39'}$$

равна тождественно нулю *).

Действительно, каждый член суммы (6.39′) есть произведение частной производной второго порядка на две частные производные первого порядка. Поэтому достаточно показать, что сумма (6.39′) вовсе не содержит производных второго порядка. Покажем, например, что эта сумма не содержит вторых производных от $F$, т. е. что все члены, содержащие эти производные, взаимно сокращаются. В самом деле, члены, содержащие вторые производные от $F$, входят только в сумму $(\Phi, \Phi_1) + (\Psi, \Psi_1)$, причем можно написать

$$(\Phi, \Phi_1) + (\Psi, \Psi_1) = (\Phi, (\Psi, F)) - (\Psi, (\Phi, F)).$$

Но так как скобка Пуассона линейна относительно производных каждой из функций, то мы можем положить

$$(\Phi, F) = A(F), \quad (\Psi, F) = B(F);$$

тогда выражение $(\Phi, \Phi_1) + (\Psi, \Psi_1)$ запишется в виде

$$(\Phi, \Phi_1) + (\Psi, \Psi_1) = A(B(F)) - B(A(F)),$$

а эта величина, как было отмечено, не содержит вторых производных от функции $F$. Аналогично показывается, что сумма (6.39′) не содержит вторых частных производных также и функций $\Phi$ и $\Psi$. Следовательно, сумма (6.39′) тождественно равна нулю и тождество Якоби (6.38) доказано.

Теперь легко вывести теорему Пуассона, которую можно сформулировать следующим образом:

**Теорема Пуассона.** Если $F = C_1$ и $\Phi = C_2$ суть два первых интеграла канонической системы, то $(F, \Phi) = C_3$ также есть интеграл этой системы.

Действительно, так как $F$ и $\Phi$ — интегралы системы (6.32), то по (6.35′) имеем тождественно

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (F, H) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\Phi, H) = 0. \tag{6.40}$$

Применим тождество Якоби к трем функциям, $H$, $F$ и $\Phi$, что дает

$$(H, (F, \Phi)) + (F, (\Phi, H)) + (\Phi, (H, F)) = 0.$$

*) К. Якоби, Лекции по динамике (перев. с нем., ОНТИ, 1936), или А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961. См. также Уинтнер, Аналитические основы небесной механики, перев. с англ., «Наука», 1967.

Это тождество при помощи тождеств (6.40) и отмеченных выше свойств скобок Пуассона можно переписать в виде

$$\left(F, \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \Phi\right)+((F, \Phi), H)=0,$$

или, используя (6.37), в виде

$$\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial t}+((F, \Phi), H)=0,$$

откуда в силу условия (6.35′) находим, что

$$(F, \Phi)=C_3=\text{const} \tag{6.40′}$$

есть также интеграл канонической системы (6.32).

Не следует думать, что, зная некоторые интегралы системы канонических уравнений, мы можем всегда выводить при помощи теоремы Пуассона новые интегралы. Действительно, может оказаться, что скобка $(F, \Phi)$ приводится тождественно к постоянной или образует уже известный интеграл.

Если функция Гамильтона $H$ не зависит от времени, то уравнения (6.32), как уже известно, всегда имеют интеграл

$$H(q \mid p)=h.$$

Пусть

$$\Phi(q \mid p \mid t)=C \tag{6.41}$$

есть какой-то другой интеграл той же системы (6.32). Тогда, по теореме Пуассона,

$$(H, \Phi)=C' \tag{6.41′}$$

также будет интегралом системы (6.32). Но, с другой стороны, по условию (6.35′), мы имеем также тождественно

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\Phi, H)=0, \tag{6.41″}$$

и интеграл (6.41′) приведется к виду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=C'.$$

Если интеграл (6.41′) не зависит от времени, то имеем тождество

$$(\Phi, H)\equiv 0,$$

и из двух интегралов $H=h$ и $\Phi=C$ не получается нового интеграла.

**4.** Чтобы дать примеры канонических уравнений, рассмотрим сначала задачу о движении материальной точки под действием силы, обладающей не зависящей от времени силовой функцией.

В сферических координатах живая сила определяется формулой (6.25), а поэтому, полагая $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, имеем

$$p_1 = m\dot{r}, \quad p_2 = mr^2\dot{\varphi}, \quad p_3 = mr^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}.$$

В канонических переменных живая сила примет вид

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2 \cos^2 \varphi}\right)$$

и уравнения движения могут быть написаны в виде

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

где функция Гамильтона определяется формулой

$$H = T - U.$$

Очевидно, что в этом примере существует интеграл $H = h$, являющийся интегралом энергии. Если, кроме того, силовая функция не зависит от долготы $\lambda$, то $H$ тоже не зависит от $\lambda$, и мы имеем еще один интеграл

$$\Phi = p_3 = mr^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda} = c_3 = \text{const}.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$(\Phi, H) \equiv 0,$$

и теорема Пуассона не дает нового интеграла.

Для второго примера возьмем уравнения движения материальной точки в системе координат, вращающейся вокруг оси аппликат с постоянной угловой скоростью $n$. Кроме того, предположим, что действующая сила имеет силовую функцию, не зависящую от времени.

Живая сила определится в этом случае по формуле (6.26), где нужно положить $\dot{v} = n$, т. е.

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2n(x\dot{y} - y\dot{x}) + n^2(x^2 + y^2)\right],$$

откуда находим выражения для импульсов

$$p_1 = m(\dot{x} - ny), \quad p_2 = m(\dot{y} + nx), \quad p_3 = m\dot{z},$$

и уравнения движения могут быть написаны в виде (6.32) с характеристической функцией:

$$H = T_2 - T_0 - U = \frac{1}{2m}\left[(p_1 + mnq_2)^2 + (p_2 - mnq_1)^2 + p_3^2\right] - \Omega,$$

где, как и ранее,

$$\Omega = T_0 + U = \frac{mn^2}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) + U.$$

Очевидно, что в этом примере также существует интеграл

$$H = h,$$

являющийся интегралом Якоби.

Нахождение какого-либо другого интеграла этой задачи в силу теоремы Пуассона приводится к разысканию решения уравнения в частных производных первого порядка (6.35), где $\Phi$ есть неизвестная функция. Такие решения до сих пор не найдены.

## § 5. Канонические преобразования

1. Канонические уравнения обладают одним замечательным свойством, которое заключается в том, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях зависимых переменных $q$ и $p$.

Это свойство формулируется обычно в виде теоремы, называемой теоремой Якоби *).

Рассмотрим произвольно заданную каноническую систему

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{6.42}$$

полностью определяемую заданием характеристической функции

$$H = H(t \mid q \mid p),$$

которую будем предполагать однозначной и непрерывной функцией независимых переменных $t$, $q$, $p$ в некоторой области их изменения, обладающей непрерывными частными производными первого порядка **).

Пусть, далее,

$$\psi = \psi(t \mid q \mid \xi),$$

есть произвольно заданная, однозначная и непрерывная функция от $k$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_k$, $k$ новых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и вообще от $t$.

---

*) К. Якоби, Лекции по динамике (перев. с нем., ОНТИ, 1936), или Т. Леви-Чивита и У. Амальди, Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2 (перев. с итальянского, ИЛ, 1951), а также Уинтнер, Аналитические основы небесной механики (перев. с англ., «Наука», 1967).

**) Рассматриваемые канонические уравнения вовсе не обязательно являются уравнениями движения какой-либо материальной системы.