где, как и ранее,

$$\Omega = T_0 + U = \frac{mn^2}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) + U.$$

Очевидно, что в этом примере также существует интеграл

$$H = h,$$

являющийся интегралом Якоби.

Нахождение какого-либо другого интеграла этой задачи в силу теоремы Пуассона приводится к разысканию решения уравнения в частных производных первого порядка (6.35), где Φ есть неизвестная функция. Такие решения до сих пор не найдены.

§ 5. Канонические преобразования

1. Канонические уравнения обладают одним замечательным свойством, которое заключается в том, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях зависимых переменных q и p.

Это свойство формулируется обычно в виде теоремы, называемой теоремой Якоби *).

Рассмотрим произвольно заданную каноническую систему

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{6.42}$$

полностью определяемую заданием характеристической функции

$$H = H(t \mid q \mid p),$$

которую будем предполагать однозначной и непрерывной функцией независимых переменных t, q, p в некоторой области их изменения, обладающей непрерывными частными производными первого порядка **).

Пусть, далее,

$$\psi = \psi(t \mid q \mid \xi),$$

есть произвольно заданная, однозначная и непрерывная функция от k переменных $q_1, q_2, \ldots, q_k$, k новых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и вообще от t.

---

*) К. Якоби, Лекции по динамике (перев. с нем., ОНТИ, 1936), или Т. Леви-Чивита и У. Амальди, Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2 (перев. с итальянского, ИЛ, 1951), а также Уинтнер, Аналитические основы небесной механики (перев. с англ., «Наука», 1967).

**) Рассматриваемые канонические уравнения вовсе не обязательно являются уравнениями движения какой-либо материальной системы.

Мы предположим, сверх того, что ψ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и что якобиан

$$\bar{\psi}=\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial q_j\,\partial\xi_s}\right|$$

не равен тождественно нулю..

Введем теперь вместо переменных q_j и p_j новые переменные, ξ_j и η_j, посредством соотношений

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_j}=p_j,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}=-\eta_j\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,k),\tag{6.43}$$

исходя из которых можно выразить и старые переменные через новые и, наоборот, новые через старые.

Действительно, так как, по предположению, функциональный определитель $\bar{\psi}$ не есть нуль, то уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}=-\eta_j\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,k)$$

разрешимы относительно величин q и позволяют выразить эти переменные как однозначные функции от t, ξ, η. Подставляя полученные выражения в равенства

$$p_j=\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,k),$$

мы получим также переменные p как однозначные функции от ξ, η, t. Аналогичное рассуждение покажет, что ξ, η являются однозначными функциями от t, p, q.

Итак, мы можем написать

$$q_j=q_j(t\,|\,\xi\,|\,\eta)\quad p_j=p_j(t\,|\,\xi\,|\,\eta).\tag{6.43'}$$

Теорема, которую мы хотим доказать, формулируется следующим образом:

Теорема Якоби. *Если уравнения (6.42) преобразуются к новым переменным ξ, η посредством подстановки (6.43), то уравнения, определяющие новые переменные, также будут иметь каноническую форму и напишутся в виде*

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\eta_j},\quad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\xi_j}\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,k),\tag{6.44}$$

где новая характеристическая функция R определяется формулой

$$R=H+\frac{\partial\psi}{\partial t},\tag{6.45}$$

в которой H и $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ должны быть выражены через ξ и η при помощи соотношений (6.43′).

Доказательство. Считая, что характеристическая функция H зависит от ξ и η через посредство q и p, вычислим частную производную от H по η_j. Мы имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \eta_j},$$

что в силу уравнений (6.42) приводится к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = -\sum_{s=1}^{k} \frac{dp_s}{dt} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} + \sum_{s=1}^{k} \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial p_s}{\partial \eta_j}.$$

Далее из соотношений (6.43) находим

$$\frac{\partial p_s}{\partial \eta_j} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \eta_j},$$

вследствие чего последнее равенство принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = -\sum_{s=1}^{k} \frac{dp_s}{dt} \frac{\partial q_s}{\partial \eta_j} + \sum_{s=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \eta_j}.$$

Заменяя в первой сумме индекс s на i и изменяя порядок суммирования во второй сумме, мы напишем предыдущее равенство в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \left[-\frac{dp_i}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_s} \right].$$

Дифференцируя теперь равенство

$$p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

полным образом по t, получаем

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial t}.$$

Коэффициент при производной $\dot{\xi}_s$ в этом выражении равен

$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial q_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial \xi_s}.$$

Но если будем дифференцировать соотношение

$$-\eta_s = \frac{\partial\psi}{\partial\xi_s}$$

по величинам $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, то получим

для $j \neq s$:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_s\,\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\eta_j},$$

и для $j = s$:

$$-1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_s\,\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\eta_j}.$$

Следовательно. в выражении для $\frac{\partial H}{\partial\eta_j}$ из двойной суммы остается только один член, для которого $s = j$, и мы найдем

$$\frac{\partial H}{\partial\eta_j} = \frac{d\xi_j}{dt} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\eta_j}.$$

Полагая теперь

$$R = H + \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

мы напишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial\eta_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

и, следовательно, половина теоремы доказана.

Подобным же образом доказывается и вторая половина теоремы. Прежде всего, вычисляя частную производную от H по ξ_j, имеем

$$\frac{\partial H}{\partial\xi_j} = \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\,\frac{\partial q_s}{\partial\xi_j} + \frac{\partial H}{\partial p_s}\,\frac{\partial p_s}{\partial\xi_j} \right) = \sum_{s=1}^{k} \left(-\frac{dp_s}{dt}\,\frac{\partial q_s}{\partial\xi_j} + \frac{dq_s}{dt}\,\frac{\partial p_s}{\partial\xi_j} \right).$$

Дифференцируя затем соотношение

$$p_s = \frac{\partial\psi}{\partial q_s}$$

частным образом по ξ_j и полным образом по t, получим

$$\frac{\partial p_s}{\partial\xi_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\xi_j} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial\xi_j},$$

$$\frac{dp_s}{dt} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial q_i}\,\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial\xi_i}\,\frac{d\xi_i}{dt} \right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial t},$$

поэтому выражение для $\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ напишется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = -\sum_{s=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} + \sum_{s=1}^{k} \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_j}.$$

Для упрощения правой части последнего равенства заметим, что коэффициент при $\dot{\xi}_i$ в первой сумме равен

$$-\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i}.$$

Но, дифференцируя по ξ_j соотношение

$$-\eta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i},$$

получим

$$0 = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j},$$

откуда следует, что упомянутый коэффициент приводится к одночленному выражению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j},$$

и производная $\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ напишется (после замены индекса i в первой сумме на s) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_s \partial \xi_j} \frac{d\xi_s}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_j} \frac{dq_s}{dt} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j}.$$

С другой стороны, дифференцируя соотношение

$$-\eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}$$

полным образом по t, получим

$$-\frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t}.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, найдем

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} + \frac{d\eta_j}{dt} = -\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial \xi_j} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j},$$

то окончательно

$$\frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

Заметим, что, изменяя несколько обозначения для зависимых переменных, мы можем получить другие виды записи преобразования, в результате которого каноническая система (6.42) переходит в каноническую систему (6.44) с характеристической функцией (6.45).

Таким образом, каждое из трех следующих преобразований:

1) $\psi = \psi(t \mid p \mid \eta)$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = q, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\xi,$$

2) $\psi = \psi(t \mid q \mid \eta)$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = p, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \xi,$$

3) $\psi = \psi(t \mid p \mid \xi)$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = q, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \eta$$

также будет каноническим преобразованием.

Примечание. Если формулы первоначального преобразования написать в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = p, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \eta$$

(что сводится просто к замене η на $-\eta$), то преобразованные уравнения будут иметь вид

$$\frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \qquad \frac{d\eta_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \xi_j}. \tag{6.44'}$$

2. Если функция преобразования ψ не зависит от времени, то формулы преобразования также не будут содержать t, а поэтому вместо (6.43′) мы будем иметь соотношения вида

$$q_j = q_j(\xi \mid \eta), \qquad p_j = p_j(\xi \mid \eta). \tag{6.43''}$$

Кроме того, в этом случае

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv 0, \qquad R \equiv H,$$

так что характеристическая функция преобразованной системы получится простой подстановкой в первоначальную характеристическую функцию H вместо q и p их выражений (6.43″).

Полезно рассматривать этот частный случай как отдельную теорему, которая более полно может быть сформулирована следующим образом:

Каноническая система

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

переходит в каноническую систему того же вида

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \xi_j},$$

если преобразование переменных устанавливается одним из следующих четырех способов:

1) $\psi=\psi(q\,|\,\xi)$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial q}=p, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi}=-\eta;$$

2) $\psi=\psi(p\,|\,\eta)$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial p}=q, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\xi;$$

3) $\psi=\psi(q\,|\,\eta)$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial q}=p, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\xi;$$

4) $\psi=\psi(p\,|\,\xi)$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial p}=q, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\eta,$$

причем во всех случаях функция преобразования ψ есть любая однозначная, непрерывная функция указанных аргументов (в некоторой области их изменения), обладающая непрерывными частными производными первого и второго порядков.

Теорема Якоби может быть сформулирована еще, как указал Пуанкаре*), другим, весьма изящным образом. Действительно, рассмотрим, например, функцию преобразования вида $\psi(q\,|\,\xi)$ и

*) А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. с франц., «Наука», 1965.

найдем ее полный дифференциал. Мы будем иметь

$$d\psi=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}d\xi_j\right),$$

что можно представить с помощью формул преобразования в виде

$$d\psi(q\,|\,\xi)=\sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j-\eta_j\,d\xi_j),$$

откуда следует, что выражение

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j-\eta_j\,d\xi_j) \tag{6.45}$$

есть полный дифференциал.

Наоборот, пусть заданы формулы преобразования (6.43″). Если разрешить уравнения (6.43″) относительно p и η, то получим соотношения вида

$$p_j=p_j(q\,|\,\xi),\quad \eta_j=\eta_j(q\,|\,\xi).$$

Допустим, что после подстановки этих значений в выражение (6.45) последнее станет полным дифференциалом некоторой функции $\psi(q\,|\,\xi)$ переменных q и ξ.

Тогда мы можем написать

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j-\eta_j\,d\xi_j)=d\psi=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}d\xi_j\right),$$

откуда имеем, очевидно,

$$p_j=\frac{\partial\psi}{\partial q_j},\qquad -\eta_j=\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j},$$

т. е. функция $\psi(q\,|\,\xi)$ есть функция канонического преобразования.

Аналогичный результат получим также, рассматривая и любой из остальных случаев преобразования, вследствие чего теорему Якоби можно сформулировать еще следующим образом:

Канонические уравнения не изменяют своего вида при всех преобразованиях переменных, при которых одно из четырех выражений

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j-\eta_j\,d\xi_j),\qquad \sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j+\xi_j\,d\eta_j),$$

$$\sum_{j=1}^{k}(q_j\,dp_j-\xi_j\,d\eta_j),\qquad \sum_{j=1}^{k}(q_j\,dp_j+\eta_j\,d\xi_j),$$

*есть полный дифференциал**).

*) Предполагается, что преобразование не зависит от времени.

Эта формулировка теоремы Якоби удобна тем, что при ее применении нам не нужно знать функцию преобразования.

Рассмотрим, например, преобразование *)

$$q_1 = \sqrt{2\xi_1}\cos\eta_1, \quad p_1 = \sqrt{2\xi_1}\sin\eta_1,$$
$$q_s = \xi_s, \quad p_s = \eta_s \quad (s = 2, 3, \ldots, k).$$

Так как

$$q_1\,dp_1 = 2\xi_1\cos^2\eta_1\,d\eta_1 + \sin\eta_1\cos\eta_1\,d\xi_1,$$

то

$$q_1\,dp_1 - \xi_1\,d\eta_1 = \xi_1\cos 2\eta_1\,d\eta_1 + \frac{1}{2}\sin 2\eta_1\,d\xi_1 = d\left(\frac{1}{2}\xi_1\sin 2\eta_1\right),$$

и мы находим, что выражение

$$\sum_{j=1}^{k}(q_j\,dp_j - \xi_j\,d\eta_j) = d\left(\frac{1}{2}\xi_1\sin 2\eta_1\right)$$

есть полный дифференциал. Поэтому указанное преобразование есть каноническое.

Рассмотрим еще линейное преобразование вида

$$q_j = \sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\xi_s, \quad p_j = \sum_{s=1}^{k}\beta_{js}\eta_s, \tag{6.46}$$

где α и β — постоянные коэффициенты. Предположим, что эти постоянные таковы, что мы имеем тождественно

$$\sum_{j=1}^{k}q_jp_j = \sum_{j=1}^{k}\xi_j\eta_j. \tag{6.46'}$$

Тогда преобразование (6.46) есть каноническое. Действительно, из (6.46) следует, что dp связаны с $d\eta$ теми же линейными соотношениями, как и p с η. Поэтому в тождестве (6.46′) мы можем заменить p_j и η_j на dp_j и $d\eta_j$, что приводит к следующему тождеству:

$$\sum_{j=1}^{k}q_j\,dp_j = \sum_{j=1}^{k}\xi_j\,d\eta_j,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{k}(q_j\,dp_j - \xi_j\,d\eta_j) = 0,$$

что, очевидно, есть полный дифференциал.

---

*) Этот пример показывает, сверх того, что можно преобразовывать не все канонические переменные, а только некоторые пары из них, не изменяя вовсе остальных переменных.

Возьмем теперь частный случай линейного преобразования, когда $\beta_{js}=\alpha_{js}$, т. е. когда

$$q_j=\sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\xi_s, \qquad p_j=\sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\eta_s. \tag{6.46''}$$

Покажем, что если это преобразование является ортогональным, то оно также будет каноническим.

Действительно, если преобразование (6.46''), определяемое коэффициентом α_{js}, ортогонально, то выполняются следующие условия *):

$$\sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}^2=1, \qquad \sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\alpha_{ls}=0 \qquad (i\neq j),$$

откуда вытекают соотношения

$$\sum_{j=1}^{k}q_j^2=\sum_{j=1}^{k}\xi_j^2, \qquad \sum_{j=1}^{k}p_j^2=\sum_{j=1}^{k}\eta_j^2,$$

$$\sum_{j=1}^{k}(q_j+p_j)^2=\sum_{j=1}^{k}(\xi_j+\eta_j)^2,$$

из которых в свою очередь следует

$$\sum_{j=1}^{k}q_jp_j=\sum_{j=1}^{k}\xi_j\eta_j,$$

т. е. преобразование (4.46'') есть каноническое.

Примечание. Функция преобразования ψ есть произвольно заданная функция от k старых и k новых переменных. Поэтому этой функции можно придать любую желаемую форму. Например, в случаях 3) и 4) общего канонического преобразования можно положить:

3*) $\psi(t\,|\,q\,|\,\eta)=\sum_{j=1}^{k}q_j\eta_j+\psi^*(t\,|\,q\,|\,\eta)$, так что формулы преобразования напишутся в виде

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial q}=p-\eta, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}=\xi-q,$$

и

4*) $\psi(t\,|\,p\,|\,\xi)=\sum_{j=1}^{k}p_j\xi_j+\psi^*(t\,|\,p\,|\,\xi)$, с формулами преобразования

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial p}=q-\xi, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}=\eta-p.$$

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3 (любое издание), или А. Г. Курош, Курс высшей алгебры (любое издание).