§ 6. Метод Гамильтона — Якоби

1. Из теории канонических преобразований вытекает примечательный способ нахождения общего решения какой угодно канонической системы.

Пусть нам нужно проинтегрировать систему

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},\tag{6.47}$$

где характеристическая функция H есть заданная функция времени и канонических переменных q и p.

Как показано в предыдущем параграфе, если нам дана функция $\psi(t|q|\xi)$ старых переменных q и новых переменных ξ от t, то, делая преобразование переменных по формулам

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_j}=p_j,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}=-\eta_j,\tag{6.48}$$

мы получим преобразованные уравнения в виде

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\eta_j},\quad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\xi_j},\tag{6.47'}$$

где

$$R=\frac{\partial\psi}{\partial t}+H\tag{6.48'}$$

есть новая характеристическая функция.

Если нам удастся проинтегрировать преобразованную систему (6.47′), то мы будем знать новые переменные ξ и η в функции времени и $2k$ произвольных постоянных, а тогда по формулам (6.48) мы получим также и первоначальные переменные q и p как функции t и $2k$ произвольных постоянных, т. е. найдем общее решение, или общий интеграл заданной системы (6.47).

Поэтому можно поставить следующую задачу: *считая функцию преобразования ψ неизвестной, найти или подобрать ее таким образом, чтобы преобразованная система могла быть разрешена.*

Мы достигнем этой цели, подбирая, например, функцию ψ так, чтобы новая характеристическая функция R была равна тождественно нулю. Действительно, тогда уравнения (6.47′) будут иметь простейший вид

$$\frac{d\xi_j}{dt}=0,\quad \frac{d\eta_j}{dt}=0,\tag{6.47''}$$

и непосредственное их интегрирование дает

$$\xi_j=\alpha_j,\quad \eta_j=-\beta_j,\tag{6.49}$$

где α и β — постоянные интегрирования, и наша задача решена.

Итак, функцию преобразования ψ нужно определить из условия

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H=0, \tag{6.48''}$$

после чего по формулам (6.48) с помощью (6.49) получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_j}=p_j, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_j}=\beta_j, \tag{6.50}$$

а эти равенства и представляют собой общий интеграл системы (6.47), ибо дают возможность определить неизвестные величины q и p как функции времени и $2k$ произвольных постоянных α и β.

Посмотрим теперь, что представляет собой условие (6.48″). Так как характеристическая функция H зависит от t, q и p, а, с другой стороны, по формулам (6.50) должно быть $p_j=\frac{\partial\psi}{\partial q_j}$, то, заменяя в условии (6.48″) величины p этими производными, мы напишем условие (6.48″) в следующем виде:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H\left(t\,|\,q\,|\,\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0, \tag{6.51}$$

или, более подробно,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H\left(t;\, q_1, q_2, \ldots, q_k;\, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\right)=0.$$

Таким образом условие (6.48″) представляет собой уравнение в частных производных первого порядка, называемое *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Неизвестной функцией в этом уравнении является искомая функция преобразования ψ, которая должна содержать, кроме $k+1$ независимых переменных t и q, еще k величин α, являющихся произвольными постоянными.

Таким образом, чтобы найти функцию ψ, являющуюся функцией канонического преобразования и дающую общий интеграл системы (6.47), мы должны отыскать такое решение уравнения (6.51), которое заключает в себе k произвольных постоянных.

В теории дифференциальных уравнений с частными производными такое решение называется *полным интегралом*, и наша задача приводится теперь к нахождению полного интеграла уравнения (6.51) *).

---

*) Собственно говоря, *полным интегралом* называется такое решение уравнения с частными производными, которое содержит столько же произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных. Но так как сама функция ψ в уравнение (6.51) не входит, то одна из постоянных является аддитивной и здесь не существенна. См., например, В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1953, или В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 4.

Однако, вообще говоря, задача о нахождении решения уравнения с частными производными ничуть не проще интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.47).

В теории дифференциальных уравнений показывается, притом, что обе эти задачи совершенно эквивалентны, так что если удается найти полный интеграл уравнения (6.51), то в таких случаях удается также проинтегрировать и каноническую систему непосредственно.

Однако с теоретической точки зрения метод Гамильтона — Якоби представляет большой интерес, ибо является источником разнообразных приближенных методов интегрирования уравнений движения в задачах небесной механики и позволяет придать этим методам наиболее простую и удобную форму.

Если характеристическая функция H не содержит явно времени, то уравнение Гамильтона — Якоби можно несколько упростить. Действительно, сделаем в уравнении

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H\left(q \,\middle|\, \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0 \tag{6.51'}$$

подстановку

$$\psi=-ht+W, \tag{6.52}$$

где h — произвольная постоянная, а W — новая неизвестная функция, зависящая только от величин q (т. е. не содержащая t).

Мы будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-h, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial q}=\frac{\partial W}{\partial q},$$

и уравнение (6.51′) примет следующий вид:

$$H\left(q \,\middle|\, \frac{\partial W}{\partial q}\right)=h. \tag{6.53}$$

Это уравнение немного проще уравнения (6.51′), так как в него не входит t и, следовательно, независимых переменных на одно меньше. Найдя какое-нибудь решение этого уравнения, зависящее, кроме h, еще от $k-1$ произвольных постоянных α_2, α_3, ..., α_k, мы получим полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби по формуле (6.52).

Применяя теперь теорему Гамильтона — Якоби, мы можем написать общий интеграл канонической системы (6.47), где $H=H(q/p)$, в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial h}=t+\beta, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=\beta_2, \ \ldots, \ \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}=\beta_k, \tag{6.54}$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}=p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2}=p_2, \ \ldots, \ \frac{\partial W}{\partial q_k}=p_k, \tag{6.54'}$$

с произвольными постоянными

$$h,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_k,$$
$$\beta,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_k.$$

Все уравнения (6.54), кроме первого, не содержат независимой переменной t. Следовательно, мы можем определить из них какие-нибудь $k-1$ из величин q в функции одной из них, например, q_1, и произвольных постоянных.

Таким образом, мы можем написать:

$$q_s = q_s(q_1, h\,|\,\alpha\,|\,\beta) \qquad (s=2, 3, \ldots, k). \tag{6.55}$$

Уравнения (6.55) не содержат времени и поэтому дают только геометрическую картину движения. Эти уравнения называются еще *уравнениями траектории*, так как *траекторией* называется, как обычно, геометрическое место точек одного измерения в пространстве многих измерений.

Подставляя затем выражения (6.55) в первое из уравнений (6.54), мы получим соотношение между t и q_1, с помощью которого можем определить q_1, а потом и все остальные q в функции времени и произвольных постоянных. После этого уравнения (6.54′) дадут также величины p.

2. Уравнение Гамильтона — Якоби представляет собой нелинейное уравнение с частными производными и решение этого уравнения может быть найдено только в немногих частных случаях.

Лиувилль первый указал случай, когда уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах. Позднее, более общий случай указал Штеккель, и последующие работы были посвящены различным обобщениям результатов этих двух ученых. Мы ограничимся здесь рассмотрением случаев, разобранных Лиувиллем и Штеккелем, как представляющих наибольший интерес для приложений в небесной механике.

Случай Лиувилля мы рассматривали уже в § 2, как пример интегрирования в квадратурах уравнений Лагранжа. Поэтому остается только показать, что в этом случае может быть также найден и полный интеграл соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби.

Возьмем формулы (6.16) и построим с их помощью характеристическую функцию соответствующей канонической системы.

Так как

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} = BA_j(q_j)\,\dot q_j,$$

то

$$H = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{p_j^2}{2A_j(q_j)} - U_j(q_j)\right].$$

Эта характеристическая функция не зависит от t, а поэтому уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде

$$\frac{1}{B}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - U_j(q_j)\right] = h,$$

или, после замены B его значением,

$$\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - U_j(q_j) - hB_j(q_j)\right] = 0. \tag{6.56}$$

Чтобы найти решение этого уравнения, зависящее от $k-1$ произвольных постоянных, заметим, что левая его часть является суммой k слагаемых, каждое из которых содержит только одну из переменных q. Поэтому будем искать решение уравнения также в виде суммы, каждое из слагаемых которой зависит только от одной из переменных q, т. е. положим *)

$$W = \sum_{j=1}^{k} W_j(q_j). \tag{6.56$'$}$$

Подставляя это выражение для W в уравнение (6.56), мы увидим, что оно удовлетворяется, если приравнять каждое слагаемое в отдельности произвольной постоянной, т. е. положить

$$\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{dW_j}{dq_j}\right)^2 - U_j(q_j) - hB_j(q_j) = \alpha_j,$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 0.$$

Таким образом, каждая из функций W_j определяется простой квадратурой

$$W_j(q_j) = \int \sqrt{2A_j(q_j)\left[U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j\right]}\,dq_j,$$

и мы получим решение уравнения Гамильтона — Якоби (6.56) в виде

$$W = \sum_{j=1}^{k}\int \sqrt{2A_j(U_j + hB_j + \alpha_j)}\,dq_j,$$

которое содержит k произвольных постоянных.

---

*) Применяемый здесь прием нахождения полного интеграла уравнения в частных производных первого порядка есть тот же метод «разделения переменных», который мы использовали уже в теории притяжения для нахождения частных решений уравнения Лапласа.

Общий интеграл соответствующей канонической системы согласно (6.54), (6.54′) и (6.56′) напишется в следующем виде:

$$t+\beta=\sum_{j=1}^{k}\int\frac{A_jB_j\,dq_j}{\sqrt{2A_j(U_j+hB_j+\alpha_j)}},$$

$$\beta_j=\int\frac{A_j\,dq_j}{\sqrt{2A_j(U_j+hB_j+\alpha_j)}}-\int\frac{A_1\,dq_1}{\sqrt{2A_1(U_1+hB_1+\alpha_1)}}\qquad(j\neq 1),$$

$$p_j=\sqrt{2A_j(U_j+hB_j+\alpha_j)}\qquad(j=1,2,\ldots,k).$$

Рассмотрим теперь случай интегрируемости, указанный Штеккелем. Пусть даны $k(k+1)$ функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных q:

$$\varphi_{ji}(q_j),\quad U_j(q_j)\qquad(j,i,=1,2,\ldots,k),$$

и таких, что определитель $\Delta=|\varphi_{ji}(q_j)|$ не равен тождественно нулю. Тогда, если живая сила T и силовая функция U определяются формулами

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}A_jp_j^2,\qquad U=\sum_{j=1}^{k}A_jU_j(q_j),\tag{6.57}$$

где

$$A_j=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{j1}}\qquad(j=1,2,\ldots,k),$$

то уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах.

Действительно, характеристическая функция

$$H=T-U=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}A_jp_j^2-A_jU_j\right)$$

не зависит от t и поэтому уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде

$$\sum_{j=1}^{k}A_j\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2-2U_j(q_j)\right]=2h.\tag{6.57′}$$

Чтобы привести это уравнение к квадратурам, заметим, что из формулы

$$\Delta=\sum_{j=1}^{k}\varphi_{j1}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{j1}}$$

и выражений для A_j следует, что

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi_{j1}A_j=1.$$

С помощью последнего равенства уравнение (6.57′) примет вид

$$\sum_{j=1}^{k} A_j\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - 2U_j(q_j) - 2h\varphi_{j1}(q_j)\right] = 0. \tag{6.58}$$

Теперь можем применить способ разделения переменных и искать решение уравнения (6.58) в виде суммы

$$W = \sum_{j=1}^{k} W_j(q_j).$$

Тогда уравнение (6.58) удовлетворяется, если положить

$$\left(\frac{dW_j}{dq_j}\right)^2 = 2U_j(q_j) + 2h\varphi_{j1}(q_j) + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}(q_j), \tag{6.58′}$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ — произвольные постоянные *).

Определяя затем W_j квадратурой и беря сумму полученных выражений, найдем окончательно:

$$W = \sum_{j=1}^{k} \int \sqrt{2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}}\, dq_j. \tag{6.59}$$

Теперь по формулам (6.54) и (6.54′) получим общий интеграл соответствующей канонической системы:

$$t + \beta = \sum_{j=1}^{k} \int \frac{\varphi_{j1}\, dq_j}{\sqrt{2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum\limits_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}}},$$

$$\beta_j = \int \frac{\varphi_{jj}\, dq_j}{\sqrt{2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum\limits_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}}} \qquad (j \neq 1),$$

$$p_j = \sqrt{2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}}.$$

---

*) Действительно, подставляя выражения (6.58′) в уравнение (6.58), мы представим левую его часть в виде

$$\sum_{j=1}^{k} A_j \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji} = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{k} A_j\varphi_{ji},$$

а заменяя здесь A_j их значениями, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{k} A_j\varphi_{ji} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{k} \varphi_{ji} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{j1}}.$$

В силу известного свойства определителей правая часть последнего равенства равна тождественно нулю для всякого $i = 2, 3, \ldots, k$.

3. Возвращаясь теперь к общей канонической системе

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},\tag{6.60}$$

рассмотрим весьма важный для последующих приложений способ ее интегрирования, называемый методом изменения произвольных постоянных.

Разложим характеристическую функцию $H(t|q|p)$ произвольным образом на сумму двух слагаемых, полагая $H(t|q|p)=H_0(t|q|p)+H_1(t|q|p)$, и рассмотрим каноническую систему с упрощенной характеристической функцией $H_0(t|q|p)$:

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H_0}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H_0}{\partial q_j}.\tag{6.60$'$}$$

Предположим, что соответствующее системе (6.60′) уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H_0\left(t\,|\,q\,|\,\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0\tag{6.61}$$

мы сумели каким-то способом проинтегрировать, т. е. нашли решение этого уравнения $\psi(t|q|\alpha)$, зависящее от k произвольных постоянных α.

Тогда по формулам (6.50) мы найдем общий интеграл упрощенной системы (6.60′) в следующем виде:

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_j}=p_j,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_j}=\beta_j,\tag{6.62}$$

а решая эти уравнения относительно q и p, мы получим общее решение системы (6.60′):

$$q_j=q_j(t\,|\,\alpha\,|\,\beta),\quad p_j=p_j(t\,|\,\alpha\,|\,\beta).\tag{6.62$'$}$$

Функции (6.62′) удовлетворяют (в силу самого способа их получения) уравнениям (6.60′), каковы бы ни были значения произвольных постоянных α и β, но они, конечно, не удовлетворяют первоначальной системе (6.60).

Однако, если считать величины α и β не постоянными, а некоторыми функциями времени, мы можем подобрать эти функции таким образом, чтобы выражения (6.62′) удовлетворяли также уравнениям (6.60).

В этом и заключается основная идея метода изменения произвольных постоянных, обоснованного Лагранжем и приспособленного Якоби для канонических систем *).

*) Собственно говоря, первоисточником метода вариации постоянных являются «Математические начала натуральной философии» И. Ньютона. См. перев. с лат. акад. А. Н. Крылова, Собрание сочинений, т. VII. См. также «Историко-библиографический очерк» в первом издании этой книги.

С математической точки зрения этот метод представляет собой просто замену переменных q и p переменными α и β посредством формул преобразования (6.62) с функцией преобразования ψ, удовлетворяющей уравнению (6.61).

Поэтому на основании теоремы Якоби новые переменные α и β определятся канонической системой с характеристической функцией

$$R = H + \frac{\partial\psi}{\partial t} = H - H_0 = H_1. \tag{6.63}$$

В силу примечания к теореме Якоби эта каноническая система будет иметь вид

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_j}, \quad \frac{d\beta_j}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}. \tag{6.63$'$}$$

Решая систему (6.63′), мы получим α и β как функции времени и $2k$ произвольных постоянных α' и β' в виде

$$\alpha_j = \alpha_j(t\,|\,\alpha'\,|\,\beta'), \quad \beta_j = \beta_j(t\,|\,\alpha'\,|\,\beta'), \tag{6.63$''$}$$

а подставляя эти выражения в формулы (6.62′), мы найдем также общее решение заданной канонической системы.

Заметим, что уравнения (6.60) называются часто уравнениями *промежуточного* или *невозмущенного* движения. Величины α и β называют тогда *каноническими элементами*, а H_1 — *возмущающей* (или *пертурбационной*) функцией.

Если характеристическая функция не зависит от времени, то естественно выбрать H_0 также не зависящей от времени, а тогда вместо уравнения (6.61) будет

$$H_0\left(q \,\middle|\, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = h. \tag{6.61$'$}$$

Если $W(q\,|\,\alpha\,|\,h)$ есть решение этого уравнения, зависящее, кроме h, еще от $k-1$ произвольных постоянных α, то общий интеграл упрощенной системы (невозмущенного движения) определится формулами

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial h} = t + \beta, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ \ldots, \ \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \\ &\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \ \ldots, \ \frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k, \end{aligned}\right\} \tag{6.62$'$}$$

которые и будут формулами преобразования к новым переменным; для их определения будем иметь те же уравнения (6.63′), в которых нужно только положить $\alpha_1 = h$ и $\beta_1 = \beta$.

Отметим, что иногда бывает удобно взять за одну из новых переменных $t+\beta$ вместо β, что не изменит канонического вида уравнений, но слегка изменит характеристическую функцию. Действительно, сделаем в уравнениях (6.63) подстановку

$$\begin{aligned} t+\beta &= \beta_1^*, \quad \beta_s = \beta_s^*, \\ h &= \alpha_1^*, \quad \alpha_s = \alpha_s^*, \end{aligned} \qquad (s \neq 1).$$

Тогда

$$\frac{d\beta_1^*}{dt} = 1 + \frac{d\beta}{dt} = 1 + \frac{\partial H_1}{\partial h} = \frac{\partial (H_1 + \alpha_1^*)}{\partial \alpha_1^*}, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1^*}.$$

Полагая

$$H_1^* = H_1 + \alpha_1^*,$$

будем иметь вместо системы (6.63) следующую:

$$\frac{d\alpha_j^*}{dt} = -\frac{\partial H_1^*}{\partial \beta_j^*}, \qquad \frac{d\beta_j^*}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_j^*}. \tag{6.64}$$

Общее решение этой системы запишется в виде

$$\alpha_j^* = \alpha_j^* (t \mid \tilde{\alpha} \mid \tilde{\beta}), \quad \beta_j^* = \beta_j^* (t \mid \tilde{\alpha} \mid \tilde{\beta}). \tag{6.64'}$$

Разрешая уравнения (6.62′) относительно канонических переменных, мы получим общее решение уравнений невозмущенного движения в виде

$$q_j = q_j (\alpha^* \mid \beta^*), \quad p_j = p_j (\alpha^* \mid \beta^*), \tag{6.65}$$

а заменяя здесь α^* и β^* выражениями (6.64′), мы найдем также общее решение первоначальных уравнений — *уравнений возмущенного движения*.