

Г Л А В А VII

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ**

§ 1. Постановка основной задачи небесной механики

1. Как было отмечено в конце предисловия первого издания этой книги*), мы условились называть небесной механикой тот раздел астрономии, который посвящен изучению движений небесных тел или, лучше сказать, небесных объектов. Последнее понятие включает в себя как естественные небесные образования (частицы космической пыли, газовые облака, планеты, кометы, отдельные звезды, звездные системы, туманности и т. д.), так и искусственные небесные тела (искусственные спутники Земли, Луны, Марса, Венеры, космические корабли, межпланетные станции и т. п.), число которых начиная с 1957 г. необыкновенно быстро растет.

Изучить движение какого-либо небесного тела это значит, с одной стороны, установить общие законы, характеризующие это движение в целом, а с другой стороны, получить возможность определять для всякого момента времени положение и скорость рассматриваемого тела по отношению к другим телам Вселенной.

Эти две части исследования всякого движения известны под названиями качественного и количественного анализа движения и, строго говоря, не могут быть отделены друг от друга, если мы ставим своей целью возможно более полное изучение окружающего нас мира.

Однако при рассмотрении отдельных частных задач мы обычно интересуемся какими-либо определенными целями, вследствие чего останавливаем свое внимание либо только на качественной либо только на количественной стороне исследования. Так, например, для составления таблиц движения планет

*) Г. Н. Дубошин, Небесная механика, Физматгиз, 1963.

солнечной системы нам нужно получать только числовые значения координат планет, а для исследования эволюции солнечной системы нам необходимы сведения об общих законах движения.

Движение всякого тела составляется, как известно из теоретической механики, из поступательного движения собственного центра масс (центра инерции), из вращательного движения вокруг центра инерции и из изменения формы и структуры тела*).

Эти три части изучения движения также, вообще говоря, не могут быть отделены одна от другой и должны рассматриваться совместно.

Но такое обширное, комплексное исследование всегда оказывается недоступным благодаря своей сложности и возникающим вследствие этого математическим трудностям. Поэтому на практике эти три части разделяют и каждую из них рассматривают отдельно, посвящая ей особый раздел науки.

Всякое движение происходит вследствие совместного действия ряда сил. Для исследования движения необходимо прежде всего точно знать характер каждой силы и законы, определяющие ее изменение. Если это известно, то изучение или исследование движения сводится к составлению дифференциальных уравнений движения и к последующему исследованию этих уравнений и их интегралов.

Силы, обуславливающие движения небесных тел, как естественных, так и искусственных, чрезвычайно многочисленны и разнообразны по своему характеру и происхождению. Законы, определяющие их изменение, в некоторых случаях известны только весьма приблизительно, а в других случаях и совершенно не известны, вследствие чего изучение движений с абсолютной точностью и во всех подробностях становится фактически невозможным.

Поэтому мы оказываемся вынужденными заранее отказаться от такой явно безнадежной задачи и заменить ее другой, более простой задачей — приближенным исследованием движений небесных тел.

Эта задача приводит нас к хорошо известному и широко применяющемуся почти во всех отраслях знания методу последовательных приближений, основная идея которого состоит в замене интересующей нас, но очень сложной задачи рядом более простых, с каждым новым шагом все усложняющихся задач. Применяя этот основной метод, мы прежде всего упрощаем нашу задачу, отбрасывая все усложняющие ее

*) Вместо центра инерции (или центра масс) иногда выгоднее рассматривать какую-либо другую точку, неизменно связанную с телом и, может быть, даже не принадлежащую этому телу. Так, например, мы поступали в части первой, рассматривая притяжения тел.

обстоятельства, с тем, чтобы такую упрощенную задачу можно было решить до конца. Эта упрощенная задача, конечно, может значительно отличаться от действительной задачи и ее решение может дать только некоторое приближение к действительности, которое уместно назвать первым приближением*).

Принимая затем во внимание некоторые из отброшенных вначале обстоятельств, мы ставим другую задачу, решение которой дает нам второе приближение к действительности.

Таким же образом мы поступаем и далее, строя третье и последующие приближения, результаты каждого из которых должны все меньше и меньше отличаться от действительности.

Вставая на путь последовательных приближений, мы должны прежде всего выбрать некоторый объект, движение которого может нас интересовать, а затем отобрать те причины, которые влияют (по нашему мнению!) на движение этого объекта и которые мы соглашаемся принимать во внимание.

Выбор объекта обуславливается тем, что задача о совместном исследовании движений всех тел Вселенной не имеет смысла, хотя бы потому, что многие небесные тела нам еще не известны и с каждым днем открываются (или создаются!) все новые и новые небесные тела.

Кроме того, мы оказываемся вынужденными рассматривать большей частью только такие небесные тела, которые могут наблюдаться (в настоящее время, или в будущем) с достаточной уверенностью при помощи астрономических инструментов, дающих нам числовую информацию о движениях в пространстве.

Поэтому первые задачи небесной механики заключались в изучении движений тел нашей солнечной системы, т. е. планет, их спутников, комет, астероидов, метеоритов и различных комбинаций из перечисленных объектов.

При этом делалось молчаливое допущение о том, что кроме солнечной системы ничего более в природе не существует, что наша система находится как бы в одиночестве во всем необъятном мировом пространстве. Такое допущение основывается, конечно, на том, что расстояния от Солнца даже до ближайших звезд и вообще расстояния между двумя любыми звездными системами настолько велики, что на интересующем нас промежутке времени их влияния друг на друга ничтожны и ими можно пренебречь. Таким образом, мы можем рассматривать солнечную систему изолированно от всех прочих звезд и можем изучать движения тел, принадлежащих к этой системе так, как будто ничего другого в природе и не существует.

*) Иногда такое первоначальное упрощение называют нулевым приближением.

В дальнейшем вследствие накопления обширного наблюдательного материала стало возможным ставить задачи и о движениях в других звездных системах, например, в системах двойных или, вообще, кратных звезд, а затем и в галактиках.

Но естественно, что каждая такая система, будь то двойная звезда или галактика, также может рассматриваться изолированно от всех прочих звездных систем так, как будто бы она находится одна во всей Вселенной.

Выбрав тот или иной объект Вселенной для изучения его движения, мы должны затем, как было отмечено выше, отобрать те силы, которые могут существенно влиять на это движение и характер которых нам достаточно хорошо известен. Все прочие силы мы соглашаемся (по крайней мере временно, в первом приближении) не рассматривать и проводим исследование так, как будто бы они совершенно не существовали.

Следуя этому принципу, небесная механика сосредоточивает свое внимание прежде всего на силах притяжения, происхождение и природа которых, правда, до сих пор не известны, но наличие которых было установлено великим Ньютоном в законе всемирного тяготения, и теперь считающимся одним из основных законов природы.

Другую категорию сил, существование которых не вызывает никаких сомнений, так как их проявления известны нам из повседневного опыта, составляют силы сопротивления среды, в которой происходит движение. Особенно часто приходится принимать во внимание силу сопротивления земной атмосферы, действующую на движущиеся около Земли искусственные спутники, а также метеоры и метеориты.

Существуют также некоторые другие известные категории сил, действия которых иногда должны приниматься во внимание и законы действия которых более или менее изучены.

Проводящееся в настоящее время широкое изучение космического пространства позволяет уточнить наши знания о природе некоторых космических сил и законах их действия и обнаруживать новые силы, ранее не известные. В дальнейшем, несомненно, будут выявляться и другие источники сил, которые, возможно, придется в будущем принимать во внимание.

Но основной силой, принимаемой во внимание во всех случаях в небесной механике, является, безусловно, сила ньютоновского притяжения, определяемая законом Ньютона, которую мы подробно рассматривали в первой части этой книги — теории притяжения.

2. Установив характер сил, которые мы соглашаемся рассматривать, мы можем затем составить дифференциальные уравнения движения тел, принадлежащих к некоторой материальной системе, относительно какой-нибудь подходящим

образом выбранной системы координат и прийти, таким образом, к чисто математической задаче, решение которой и составляет главную и первоначальную цель небесной механики.

Как известно из теоретической механики, центр масс материальной системы, не подверженной действиям внешних сил, движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно *).

Так как мы согласились изучать любую звездную систему изолированно от всей остальной Вселенной, то всякая такая система (например, солнечная система) всегда будет обладать указанным свойством **). Это свойство определяет движение системы в целом и позволяет ограничиться исследованием движений тел относительно общего центра масс всей системы.

Далее будет показано, что если мы сумеем определить движения тел системы относительно центра масс, то уже без всяких затруднений определим и их абсолютные движения, так как движение центра масс уже известно.

Но и эта задача еще чрезвычайно сложна и мы вынуждены опять вносить в нее некоторые упрощения. Прежде всего мы строго ограничим число тел в системе, выбирая только наиболее крупные, обладающие наибольшими массами по сравнению с остальными, которые мы в первом приближении исключаем из рассмотрения. Такой отбор оправдывается тем, что тела, обладающие очень малыми массами, оказывают крайне слабые влияния на тела с большими массами, и мы можем считать в первом приближении, что эти влияния просто равны нулю. Кроме того, после того как движения крупных тел определены и изучены, можно поставить отдельную задачу о движении мелких тел, так как силы, управляющие их движениями, будут уже известны.

Второе упрощение заключается в том, что мы соглашаемся рассматривать небесные тела как абсолютно твердые, отвлекаясь, таким образом, от изменений их формы и отделяя поступательные движения тел от их вращательных движений вокруг центров масс.

*) Абсолютным пространством мы называем здесь все внешнее по отношению к рассматриваемой звездной системе пространство. «Абсолютной» системой координат мы будем называть систему координат, связанную с абсолютным пространством, т. е., по существу, с какой-либо другой звездной системой, весьма удаленной от той, на которой мы сосредоточиваем свое внимание. Таким образом, для солнечной системы абсолютной системой координат будет система, связанная с нашей Галактикой.

**) Положение изменится, если мы примем в расчет внешние силы. Поэтому центр масс солнечной системы в действительности движется в Галактике не прямолинейно и равномерно, что и обнаруживается точными наблюдениями.

Мы допускаем также, что массы тел системы не изменяются с течением времени, т. е. они являются величинами постоянными. Кроме того, в первом приближении мы совершенно пренебрежем эффектом сопротивления среды, т. е. будем рассматривать пространство, в котором движутся интересующие нас тела, как абсолютно пустое.

Все эти допущения, конечно, строго говоря, не соответствуют действительности, но ошибки, проистекающие от этих допущений, в большинстве случаев ничтожно малы и могут не приниматься во внимание.

Однако существуют отдельные случаи, в которых сделанные допущения оказываются несостоятельными и должны быть полностью или частично отброшены. Такие случаи могут быть рассмотрены отдельно после исследования той главной задачи, которую мы здесь ставим и которую называем основной задачей небесной механики.

Наконец, последнее упрощение, которое мы сделаем в первом приближении, заключается в том, что мы отвлекаемся от линейных размеров тел и уславливаемся все тела системы рассматривать как материальные точки.

Возможность этого допущения оправдывается соображениями, основанными на известных результатах теории притяжения, изложенных в первой части этой книги. А именно, было показано, что два тела, обладающие любой формой и произвольным внутренним строением, взаимно притягиваются с силой, почти обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами масс, если линейные размеры тел весьма малы по сравнению с этим расстоянием. Кроме того, было показано, что два шара, обладающие сферической структурой, притягиваются взаимно с силой, строго пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

Так как звезды, планеты и их спутники имеют примерно шарообразную форму, а расстояния между небесными телами, вообще говоря, весьма велики, то соединение двух приведенных результатов теории притяжения позволяет с достаточным основанием считать, что такие небесные тела взаимно притягиваются друг к другу так же, как притягивались бы материальные точки, помещенные в центрах инерции этих тел и обладающие их массами.

Другие тела (астероиды, метеоры, искусственные небесные тела и т. п.), не обладающие правильной сферической формой, имеют зато ничтожно малые размеры, что также позволяет рассматривать их как материальные точки, по крайней мере до тех пор, пока они не делаются слишком близкими к большому телу.

Изложенные соображения позволяют сформулировать задачу, которую и можно назвать основной задачей небесной механики:

Изучить движение материальной системы, состоящей из конечного числа свободных материальных точек, обладающих постоянными массами и движущихся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений, определяемых законом всемирного тяготения.

Сформулированная задача представляет собой, очевидно, некоторую искусственную математическую схему, которая, строго говоря, не соответствует реальной физической задаче о движении реальных небесных тел, заменяемой в первом приближении этой схемой.

Однако ввиду малости факторов, отброшенных в первом приближении, движения материальных точек в нашей схеме будут мало отличаться от движений настоящих небесных тел, по крайней мере в течение некоторого промежутка времени.

Сказанное вполне подтверждается астрономическими наблюдениями, показывающими, что отличия искусственной математической теории от действительности, вообще говоря, достаточно малы. В редких случаях обнаруживаются сколько-нибудь значительные отклонения, происходящие от недостаточности установленной теории. Однако существование таких случаев показывает, что в небесной механике невозможно ограничиться одним только первым приближением. Это заключение делается еще более справедливым, если мы захотим распространить нашу математическую теорию на очень большие промежутки времени, так как в этом случае отклонения теории от действительности могут сделаться настолько большими, что неудовлетворительность первого приближения окажется совершенно очевидной.

3. Математическая схема, которая кладется в основу небесной механики, является весьма удобным и гибким аппаратом, могущим быть приложенным к приближенному исследованию многочисленных и разнообразных задач астрономии и даже других областей науки.

Движения больших планет солнечной системы и движения звезд в звездном скоплении, движения спутников и движения малых планет и комет, движения межпланетных станций и космических кораблей, движение мельчайшей частицы космической пыли и движение сгущения в первоначальной туманности — все эти задачи, по крайней мере на первом этапе своего исследования, основываются на схеме движения материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Ввиду такой исключительной важности понятия «материальная точка» полезно напомнить здесь точное его определение, которое может быть сформулировано следующим образом:

Материальной точкой называется всякое тело, линейные размеры которого весьма малы по сравнению с расстояниями, могущими играть роль в его движении.

Таким образом, например, искусственный спутник Земли может рассматриваться как материальная точка, когда исследуется его поступательное движение, но тот же спутник должен рассматриваться как тело, имеющее определенную форму, когда ставится задача об изучении его вращательного движения вокруг центра масс.

Сама Земля может рассматриваться как материальная точка, когда исследуется ее движение вокруг Солнца и должна рассматриваться как тело при изучении ее вращения вокруг своей оси и т. д.

Заканчивая этот параграф, мы хотим еще раз подчеркнуть, что математическая теория движения некоторого количества материальных точек, которую мы будем рассматривать в этой главе, является только первым приближением задачи о действительном движении небесных тел (как естественных, так и искусственных). Это первое приближение даже в том случае, если бы оно могло быть осуществлено с абсолютной математической строгостью и полнотой, всегда нуждается в исправлениях, которые приходится вносить, чтобы приблизиться к реальной астрономической задаче.

Характер этих поправок, определяющих второе, третье и последующие приближения, в большой мере зависит от общего состояния науки в рассматриваемую эпоху, и несомненно, что если в настоящее время количество этих поправок не очень велико, то с течением времени, в связи с общим прогрессом науки, число их может сильно возрасти и тогда неизбежно встанет вопрос о пересмотре основных классических результатов механики вообще и небесной механики в частности, и возможно, придется создавать небесную механику заново, на основании новых принципов, быть может, совершенно отличных от современных.

Если говорить не о глубокой, коренной перестройке, а только о некоторых изменениях или улучшениях, связанных с прогрессом науки вообще, то они, конечно, происходят в небесной механике постоянно и особенно заметны за последние двадцать-тридцать лет. Кроме того, бурное развитие техники, которое мы наблюдаем за последнее, особенно за послевоенное, время, неизбежно сказывается также и на развитии всех отделов астрономии.

Для небесной механики особенно существенным является появление быстродействующих вычислительных машин, позволяющих теперь производить с необыкновенной быстротой и легкостью такие вычисления, о которых не могли даже и мечтать вычислители 18-го и 19-го веков.

Эти вычисления, со своей стороны, способствуют также и развитию математических (аналитических) теорий в небесной механике, которые в свою очередь требуют применения и новейших достижений математики.

Но ясно, что прежде чем говорить об этих последних достижениях, необходимо сначала ознакомиться с основными задачами и основными методами небесной механики.

§ 2. Задача многих тел в абсолютных осях

1. Как было выяснено в предыдущем параграфе, основной задачей небесной механики является задача о движении системы, состоящей из некоторого конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Эта задача и называется задачей многих тел, частными случаями которой являются задачи двух, трех, четырех и т. д. тел, к которым приводятся задачи о движении различных конкретных небесных тел *).

Так как для вывода дифференциальных уравнений движения и установления их основных свойств число материальных точек системы не имеет существенного значения, то будем считать число этих точек произвольным и обозначим его через $n+1$, а материальные точки, образующие систему, обозначим буквами M_0, M_1, \dots, M_n **).

Возьмем теперь некоторую систему прямоугольных декартовых координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в произвольно выбранной точке O пространства и с неизменными направлениями осей.

Обозначим массу материальной точки M_i через m_i , а ее координаты (так же как и в гл. I) через ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Эти координаты будут функциями времени t , и наша

*) Правильнее было бы назвать эту задачу задачей о движении многих материальных точек, но термины тело будет напоминать нам, что рассматривается хотя и приближенная, но все же астрономическая задача. Кроме того, если все тела системы являются шарами, обладающими сферическим строением, то их движения (поступательные) не отличаются от движений материальных точек (см. часть I, главы II и V).

**) Точка M_0 будет представлять обычно главное тело, которое по каким-либо причинам играет особую роль. Так, в теории движения больших планет M_0 обозначает Солнце, в теории движения спутников Юпитера M_0 обозначает Юпитер и т. д. Вовсе не обязательно, чтобы главное тело имело наибольшую массу! В кратной звездной системе примерно с одинаковыми массами за главное тело может быть выбрана любая из звезд этой системы.