Для небесной механики особенно существенным является появление быстродействующих вычислительных машин, позволяющих теперь производить с необыкновенной быстротой и легкостью такие вычисления, о которых не могли даже и мечтать вычислители 18-го и 19-го веков.

Эти вычисления, со своей стороны, способствуют также и развитию математических (аналитических) теорий в небесной механике, которые в свою очередь требуют применения и новейших достижений математики.

Но ясно, что прежде чем говорить об этих последних достижениях, необходимо сначала ознакомиться с основными задачами и основными методами небесной механики.

§ 2. Задача многих тел в абсолютных осях

1. Как было выяснено в предыдущем параграфе, основной задачей небесной механики является задача о движении системы, состоящей из некоторого конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Эта задача и называется задачей многих тел, частными случаями которой являются задачи двух, трех, четырех и т. д. тел, к которым приводятся задачи о движении различных конкретных небесных тел *).

Так как для вывода дифференциальных уравнений движения и установления их основных свойств число материальных точек системы не имеет существенного значения, то будем считать число этих точек произвольным и обозначим его через $n+1$, а материальные точки, образующие систему, обозначим буквами M_0, M_1, ..., M_n **).

Возьмем теперь некоторую систему прямоугольных декартовых координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в произвольно выбранной точке O пространства и с неизменными направлениями осей.

Обозначим массу материальной точки M_i через m_i, а ее координаты (так же как и в гл. I) через ξ_i, η_i, ζ_i ($i=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$). Эти координаты будут функциями времени t, и наша

---

*) Правильнее было бы назвать эту задачу задачей о движении многих материальных точек, но термин тело будет напоминать нам, что рассматривается хотя и приближенная, но все же астрономическая задача. Кроме того, если все тела системы являются шарами, обладающими сферическим строением, то их движения (поступательные) не отличаются от движений материальных точек (см. часть I, главы II и V).

**) Точка M_0 будет представлять обычно главное тело, которое по каким-либо причинам играет особую роль. Так, в теории движения больших планет M_0 обозначает Солнце, в теории движения спутников Юпитера M_0 обозначает Юпитер и т. д. Вовсе не обязательно, чтобы главное тело имело наибольшую массу! В кратной звездной системе примерно с одинаковыми массами за главное тело может быть выбрана любая из звезд этой системы.

задача состоит, таким образом, в определении $3(n+1)$ неизвестных функций одной независимой переменной.

Дифференциальные уравнения движения системы будут принадлежать к типу уравнений (6.1), правые части которых составляются по правилам § 3 гл. I.

Поэтому дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек напишутся в виде

$$m_i\ddot{\xi}_i = \Xi_i, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \mathrm{H}_i, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \mathrm{Z}_i, \tag{7.1}$$

где составляющие по осям координат равнодействующей всех сил, действующих на точку M_i, определятся формулами *)

$$\left.\begin{aligned} \Xi_i &= f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\xi_j-\xi_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \mathrm{H}_i &= f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\eta_j-\eta_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \mathrm{Z}_i &= f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\zeta_j-\zeta_i}{\Delta_{ij}^3}, \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

где

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2+(\zeta_j-\zeta_i)^2} \tag{7.3}$$

есть взаимное расстояние между точками M_i и M_j.

В главе I было показано, что составляющие силы, действующей на точку M_i, т. е. величины (7.2), являются частными производными по координатам этой точки от одной и той же функции, называемой *силовой функцией системы*, U, которая определяется формулой

$$U = \frac{1}{2} f\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}{}' \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \tag{7.4}$$

Таким образом, имеем

$$\Xi_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \mathrm{H}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \mathrm{Z}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \tag{7.2$'$}$$

и уравнения (7.1) напишутся в виде

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \tag{7.1$'$}$$

---

*) «Штрих» при знаке суммы обозначает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j=i$.

Уравнения (7.1) или (7.1′) представляют собой систему $3(n+1)$ совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих неизвестные функции — абсолютные координаты движущихся материальных точек.

Для полного определения функций, удовлетворяющих уравнениям (7.1), необходимо еще знать начальные условия, т. е. числовые значения этих функций (координат точек) и их первых производных (составляющих абсолютных скоростей точек) для некоторого момента времени t_0, принимаемого за начальный (начальная эпоха или просто эпоха).

Эти начальные значения должны быть заданы и составляют систему $6(n+1)$ действительных чисел

$$\xi_i^0, \quad \eta_i^0, \quad \zeta_i^0, \quad \dot{\xi}_i^0, \quad \dot{\eta}_i^0, \quad \dot{\zeta}_i^0, \tag{7.5}$$

определяющих начальное состояние нашей системы точек.

Общее решение системы (7.1) представится формулами вида

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(t \mid \xi^0, \ \eta^0, \ \zeta^0 \mid \dot{\xi}^0, \ \dot{\eta}^0, \ \dot{\zeta}^0), \\ \eta_i &= \eta_i(t \mid \xi^0, \ \eta^0, \ \zeta^0 \mid \dot{\xi}^0, \ \dot{\eta}^0, \ \dot{\zeta}^0), \\ \zeta_i &= \zeta_i(t \mid \xi^0, \ \eta^0, \ \zeta^0 \mid \dot{\xi}^0, \ \dot{\eta}^0, \ \dot{\zeta}^0), \end{aligned}\right\} \tag{7.5′}$$

и задача о движении системы взаимно притягивающихся точек приводится к следующей математической задаче:

Определить функции ξ_i, η_i, ζ_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющие совместно уравнениям (7.1) и начальным условиям (7.5) для всех значений времени $t \geqslant t_0$.

Отметим, что функция называется определенной в каком-либо промежутке времени, если известны свойства функции в этом промежутке и установлено правило, при помощи которого можно вычислять значение функции и ее производиой (или производных) для любого момента времени в этом промежутке.

Определяя движение системы для $t \geqslant t_0$, мы узнаем ее судьбу в будущем. Чтобы узнать также прошедшую судьбу системы, нужно, очевидно, определить движение и для $t < t_0$.

Так как уравнения (7.1) ие изменяются при замене t на $-t$, то мы получим значения функций для $t < t_0$, заменяя в формулах (7.5′) переменную t на $t_0 - t$, вследствие чего движение будет определено для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Силовая функция U, входящая в уравнения (7.1′), зависит только от взаимных расстояний между точками M_0, $M_1, \ldots, M_n$ и, следовательно, не зависит от выбора системы координат. Полезно заметить также, что силовая функция не зависит ни от производных $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, ни от времени (явно).

Функция U, как видно из формулы (7.4), есть алгебраическая (иррациональная) функция, определенная для любых вещественных значений координат и принимающая только неотрицательные значения. Она обращается в нуль только в том случае, когда все взаимные расстояния делаются бесконечно большими, т. е. когда все точки M_i «разлетаются» друг от друга в бесконечность.

Наоборот, функция U обращается в бесконечность всякий раз, когда хотя бы одно из взаимных расстояний делается равным нулю, т. е. когда хотя бы две из всех точек системы сталкиваются (соударяются) в одной точке пространства.

Выведем теперь два свойства силовой функции, вытекающие из ее независимости от выбора координатной системы.

Действительно, так как функция U не зависит от выбора координат, то она не изменит своего значения при любом параллельном преобразовании системы координат. Сместим начало координат вдоль оси $O\xi$ на бесконечно малую величину $\Delta\xi$, вследствие чего всякая из координат ξ_i получит приращение $\Delta\xi$, а координаты η_i и ζ_i не изменятся. Так как взаимные расстояния Δ_{ij} зависят только от разностей координат, то они также не измеиятся, а поэтому функция U тоже не изменится и, следовательно, ее полное приращение будет равно нулю.

Но приращение функции U в общем случае определяется формулой

$$dU=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i}d\xi_i+\frac{\partial U}{\partial \eta_i}d\eta_i+\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}d\zeta_i\right), \tag{7.6}$$

и так как в рассматриваемом случае

$$d\xi_i=\Delta\xi, \quad d\eta_i=d\zeta_i=0, \quad dU=0,$$

то получим, сокращая на $\Delta\xi$, $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=0.$

В силу равноправности координатных осей имеем три подобные равенства:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=0, \quad \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial \eta_i}=0, \quad \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}=0. \tag{7.6'}$$

Чтобы получить второе свойство, повернем систему координат вокруг одной из осей координат, например вокруг оси $O\zeta$, на бесконечно малый угол $\Delta\varphi$. Тогда, очевидно, координаты ζ_i

не изменятся, а координаты ξ_i и η_i получат соответственно приращения *) (рис. 40)

$$d\xi_i = -\eta_i \Delta\varphi, \quad d\eta_i = +\xi_i \Delta\varphi.$$

Ни одно из взаимных расстояний не изменится, а поэтому имеем $dU=0$ и формула (7.6) дает (после сокращения на $\Delta\varphi$)

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right) = 0,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(\zeta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\right) = 0,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(\eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i}\right) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (7.6'')$$

причем последние два соотношения написаны по очевидной аналогии и могут быть выведены совершенно так же, как и первое.

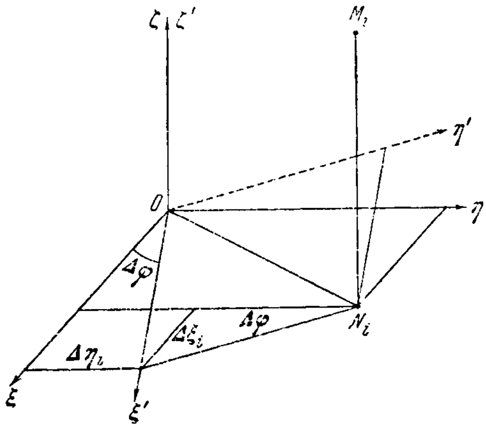

Рис. 40.

Соотношения (7.6′) и (7.6″) могут быть получены и непосредственно из выражений (7.2).

*) Действительно, обозначая новые координаты точки M_i через ξ_i' и η_i' $(\zeta_i'=0)$, мы имеем по формулам преобразования

$$\xi_i' = \xi_i \cos\Delta\varphi - \eta_i \sin\Delta\varphi, \quad \eta_i' = \xi_i \sin\Delta\varphi + \eta_i \cos\Delta\varphi.$$

Ввиду малости угла $\Delta\varphi$ его синус можно заменить самим углом, а косинус — единицей. Поэтому $\xi_i' = \xi_i - \eta_i \cdot \Delta\varphi$, $\eta_i' = \xi_i \cdot \Delta\varphi + \eta_i$, откуда получаем

$$d\xi_i = \xi_i' - \xi_i = -\eta_i \Delta\varphi, \quad d\eta_i = \eta_i' - \eta_i = +\xi_i \Delta\varphi.$$

Действительно, мы имеем, например,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \sum_{i=0}^{n} \Xi_i = f \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} \equiv 0,$$

и точно так же

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right) = \sum_{i=0}^{n} (\xi_i \mathrm{H}_i - \eta_i \Xi_i) =$$

$$= f \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i}{\Delta_{ij}^3} \equiv 0.$$

Отметим еще одно очевидное свойство силовой функции. Формула (7.4) показывает, что U есть однородная функция от переменных ξ_i, η_i, ζ_i с измерением -1, а поэтому в силу теоремы Эйлера об однородных функциях мы имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right) = -U. \tag{7.7}$$

3. Уравнения движения взаимно притягивающихся точек образуют систему $6(n+1)$-го порядка и для полного ее интегрирования нужно получить либо ее общее решение, содержащее $6(n+1)$ произвольных постоянных, либо ее общий интеграл, т. е. совокупность $6(n+1)$ независимых между собой первых интегралов. Общие принципы механики позволяют сразу получить десять из этих $6(n+1)$ первых интегралов. Однако предпочтительнее вывести эти интегралы из самих уравнений (7.1) или (7.1′).

Выведем эти десять первых интегралов, называемых обычно классическими интегралами задачи многих тел.

Прежде всего, складывая все уравнения (7.1) или (7.1′) для каждой координаты в отдельности (для $i=0, 1, \ldots, n$) и имея в виду соотношения (7.6′), мы получим следующие три уравнения:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\xi}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\eta}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\zeta}_i = 0. \tag{7.8}$$

Уравнения (7.8) являются следствиями уравнений (7.1) и замечательны тем, что левые их части представляют собой точные производные по t. Поэтому уравнения (7.8) можно непосредственно интегрировать, что дает следующие три первых интеграла:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\xi}_i = a_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\eta}_i = a_2, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\zeta}_i = a_3. \tag{7.8′}$$

Уравнения (7.8′) также, очевидно, можно интегрировать, что дает еще три первых интеграла:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i = a_1 t + b_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i = a_2 t + b_2, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i = a_3 t + b_3, \tag{7.8''}$$

где b_1, b_2, b_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (7.8′) и (7.8″), которые можно написать еще все вместе в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i = a_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i - t\dot{\xi}_i) = b_1,\\
&\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i = a_2, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i - t\dot{\eta}_i) = b_2,\\
&\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i = a_3, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i(\zeta_i - t\dot{\zeta}_i) = b_3,
\end{aligned}\right\} \tag{7.8'''}$$

называются **интегралами движения центра масс** (или центра инерции), так как эти интегралы определяют движение центра масс системы материальных точек относительно абсолютных осей.

Действительно, обозначая координаты центра масс нашей системы через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, мы имеем

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i, \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i, \tag{7.9}$$

где

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

есть полная масса всей системы.

Теперь интегралы (7.8′) и (7.8″) дают:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\xi} &= \frac{a_1}{m}t + \frac{b_1}{m}, \quad \dot{\bar{\xi}} = \frac{a_1}{m},\\
\bar{\eta} &= \frac{a_2}{m}t + \frac{b_2}{m}, \quad \dot{\bar{\eta}} = \frac{a_2}{m},\\
\bar{\zeta} &= \frac{a_3}{m}t + \frac{b_3}{m}, \quad \dot{\bar{\zeta}} = \frac{a_3}{m}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.9'}$$

Эти формулы показывают, что центр масс нашей системы точек движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.

Если Солнце и большие планеты рассматривать как материальные точки, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона и не подверженные действиям каких-либо других сил, то выведенное свойство показывает, что вся солнечная система в целом движется относительно «неподвижных» звезд прямолинейно и равномерно. Как известно, это движение направлено примерно к созвездию Геркулеса и совершается со скоростью 20 *км/сек*.

Однако, как уже было отмечено выше (см. сиоску на стр. 324), если мы примем во внимание действие звезд, составляющих нашу Галактику, то движение солнечной системы уже не может быть рассматриваемо как прямолинейное и равномерное, а должно трактоваться как равномерное, круговое, совершающееся вокруг центра Галактики.

Произвольные постоянные a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 могут быть определены (см. гл. VI, § 1) из начальных условий. Действительно, подставляя в формулы (7.8‴) вместо координат и компонентов скоростей их начальные значения и заменяя t на t_0, мы получим

$$a_1=\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i^0, \qquad b_1=\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i^0-t_0\dot{\xi}_i^0),$$

$$a_2=\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i^0, \qquad b_2=\sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i^0-t_0\dot{\eta}_i^0),$$

$$a_3=\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i^0, \qquad b_3=\sum_{i=0}^{n} m_i(\zeta_i^0-t_0\dot{\zeta}_i^0).$$

Переходим к выводу следующей группы первых интегралов. Умножая второе из уравнений (7.1′) на $-\zeta_i$, третье на $+\eta_i$, складывая и суммируя по i от нуля до n, мы имеем

$$\sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i\ddot{\zeta}_i-\zeta_i\ddot{\eta}_i)=\sum_{i=0}^{n}\left(\eta_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}-\zeta_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i}\right),$$

т. е. в силу последнего из равенств (7.6″)

$$\sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i\ddot{\zeta}_i-\zeta_i\ddot{\eta}_i)=0.$$

Комбинируя подобиым же образом две другие пары из уравнений (7.1′) и используя остальные два равенства (7.6″), мы получим еще два уравнения, аналогичные первому. Но левые части полученных таким образом трех уравнений, являющихся следствиями уравнений движения, являются точными производными по t, а следовательно, интегрируя эти уравнения, мы получим следующие три интеграла *):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) &= c_2, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) &= c_3, \end{aligned}\right\} \qquad (7.10)$$

где c_1, c_2, c_3 суть произвольные постоянные.

Уравнения (7.10) называются **интегралами площадей** или, иногда, **интегралами моментов количества движения** (или просто интегралами моментов).

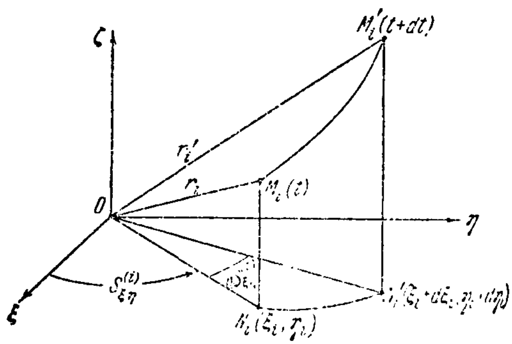

Рис. 41.

Смысл этих названий заключается в следующем. Рассмотрим общий член какой-либо из трех сумм в равенствах (7.10), например,

$$m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) = \frac{m_i}{dt} (\xi_i \, d\eta_i - \eta_i \, d\xi_i).$$

Выражение $\xi_i d\eta_i - \eta_i d\xi_i$ представляет собой удвоенную площадь $dS^{(i)}_{\xi\eta}$ элементарного треугольника $ON_iN'_i$, образованного на плоскости $(O\xi\eta)$ проекциями точек M_i и M'_i, соответствующими моментами времени t и $t+dt$ (рис. 41). Тогда последнее из уравнеиий (7.10) напишется в виде

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \, dS^{(i)}_{\xi\eta} = c_3 \, dt.$$

*) Действительно,

$$\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i = (\eta_i \ddot{\zeta}_i + \dot{\eta}_i \dot{\zeta}_i) - (\zeta_i \ddot{\eta}_i + \dot{\eta}_i \dot{\zeta}_i) = \frac{d}{dt} (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i).$$

Заметим еще, что любые два из уравнений (7.10) получаются из третьего циклической перестановкой букв ξ, η, ζ.

Интегрируя последнее равенство и два других, ему подобных, мы получим. как следствия интегралов (7.10), следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} m_i S_{\eta\zeta}^{(i)} &= c_1 t + c_1',\\ \sum_{i=0}^{n} m_i S_{\zeta\xi}^{(i)} &= c_2 t + c_2',\\ \sum_{i=0}^{n} m_i S_{\xi\eta}^{(i)} &= c_3 t + c_3',\end{aligned}\right\} \qquad (7.10')$$

где c_1, c_2, c_3 — три новые произвольные постоянные.

Формулы (7.10′) показывают, что суммы произведений масс точек системы на площади, описанные проекциями радиусов-векторов на координатные плоскости, изменяются пропорционально времени, что и дало повод назвать уравнения (7.10) интегралами площадей *).

Рассмотрим теперь второе название уравнений (7.10). Если $\boldsymbol{v}_i$ есть абсолютная скорость точки M_i, то вектор $m_i\boldsymbol{v}_i$ есть количество движения этой точки. Момент этого вектора относительно начала координат есть векторное произведение $m_i\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{r}_i$ вектора количества движения на радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i$ точки M_i и его составляющие по осям координат суть

$$m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i - \zeta_i\dot{\eta}_i), \quad m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i - \xi_i\dot{\zeta}_i), \quad m_i(\xi_i\dot{\eta}_i - \eta_i\dot{\xi}_i).$$

Поэтому левые части равенства (2.10) суть составляющие вектора момента количества движения всей системы материальных точек.

Интегралы (7.10) показывают, следовательно, что этот вектор остается постоянным (по величине и направлению) во все время движения. Это обстоятельство и дало повод для названия уравнений (7.10) интегралами моментов.

Вообразим теперь плоскость, проходящую через центр масс G системы и определяемую уравнением

$$c_1(\xi - \bar{\xi}) + c_2(\eta - \bar{\eta}) + c_3(\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \qquad (7.10'')$$

Очевидно, эта плоскость сохраняет неизменную ориентацию относительно абсолютных осей и вместе с тем перпендикулярна к вектору момента количества движения системы. Эта плоскость

---

*) Полезно отметить, что равенства (7.10′) не являются интегралами уравнений движения, так как величины $S_{\eta\zeta}^{(i)}$, $S_{\zeta\xi}^{(i)}$, $S_{\xi\eta}^{(i)}$ не выражаются конечным образом через координаты и компоненты скорости точки M_i.

имеет важное значение для небесной механики и называется неизменяемой плоскостью Лапласа*).

Постоянные интегралов (7.10), называемые обычно постоянными площадей, также легко определяются по начальным условиям (7.5) очевидными формулами:

$$c_1=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\eta_i^0\dot{\zeta}_i^0-\zeta_i^0\dot{\eta}_i^0\right),$$

$$c_2=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\zeta_i^0\dot{\xi}_i^0-\xi_i^0\dot{\zeta}_i^0\right),$$

$$c_3=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\xi_i^0\dot{\eta}_i^0-\eta_i^0\dot{\xi}_i^0\right),$$

и зависят как от начальных положений, так и от начальных скоростей всех точек системы.

Если мы обозначим величину вектора момента количества движеиия всей системы через c, то будем, очевидно, иметь

$$c=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2},$$

а направляющие косинусы этого вектора будут соответственно

$$\frac{c_1}{c},\quad \frac{c_2}{c},\quad \frac{c_3}{c}.$$

Остается получить последний из классических интегралов уравнений (7.1). Умножим для этого уравнения (7.1′) соответственно на $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$, сложим и просуммируем по i от нуля до n. Мы получим следующее уравнение, являющееся следствием уравнений (7.1):

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i\ddot{\xi}_i+\dot{\eta}_i\ddot{\eta}_i+\dot{\zeta}_i\ddot{\zeta}_i\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\dot{\xi}_i+\frac{\partial U}{\partial \eta_i}\dot{\eta}_i+\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\dot{\zeta}_i\right),$$

что, очевидно, можио переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\frac{m_i}{2}\left(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2\right)=\frac{dU}{dt},$$

откуда, интегрируя, находим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2\right)=U+h, \tag{7.11}$$

где h есть произвольная постоянная.

---

*) Оказывается, что движения всех больших планет солнечной системы происходят весьма близко от ее неизменяемой плоскости, которая, таким образом, весьма близка к плоскости эклиптики современной эпохи.

Равенство (7.11) можно еще написать в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = U + h, \tag{7.11'}$$

что показывает, что полная живая сила системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2$$

зависит только от силовой функции, а следовательно, только от взаимных расстояний между точками M_i, и поэтому не зависит от выбора системы координат.

Вследствие этого обстоятельства уравнение (7.11) называется **интегралом живой силы** (или интегралом живых сил).

Так как, кроме того, величина $-U$ есть потенциальная энергия всей системы, то, переписав равенство (7.11') в виде

$$T - U = h,$$

мы видим, что **полная энергия системы остается неизменной во все время движения**, вследствие чего уравнение (7.11) называется еще **интегралом энергии***).

Таким образом, движение системы взаимно притягивающихся материальных точек принадлежит к классу **консервативных движений**.

Постоянная живых сил (или постоянная энергии) h определяется начальными условиями (7.5) и мы можем написать

$$h = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^{0^2} - U_0,$$

где

$$v_i^0 = \sqrt{\dot{\xi}_i^{0^2} + \dot{\eta}_i^{0^2} + \dot{\zeta}_i^{0^2}}$$

есть начальная скорость точки M_i, а

$$U_0 = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n} {\sum_{j=0}^{n}}' \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^0}$$

— начальное значение силовой функции, где

$$\Delta_{ij}^0 = \sqrt{(\xi_i^0 - \xi_j^0)^2 + (\eta_i^0 - \eta_j^0)^2 + (\zeta_i^0 - \zeta_j^0)^2}$$

суть начальные взаимные расстояния.

*) Весь этот вывод представляет собой частный случай общего вывода интеграла энергии произвольной системы уравнений Лагранжа в случае существования силовой функции (см. § 2 гл. VI).

Отметим, что постоянная h зависит только от начальной конфигурации точек системы и от величин их начальных скоростей, но не зависит от направлений начальных скоростей.

4. Найденные десять классических интегралов являются единственными известными до сих пор интегралами задачи многих тел и имеют, как мы видели, простое механическое значение.

Из этих десяти интегралов только три (а именно, вторая группа интегралов движения центра масс (7.8″)) содержат время t явным образом. В остальные семь интегралов время явно не входит.

Весьма существенным является также то обстоятельство, что левые части всех десяти классических интегралов суть простые алгебраические функции от координат и их первых производных по времени.

При этом левые части интегралов движения центра масс (7.8‴) суть линейные функции указанных переменных, а левые части интегралов площадей (7.10) — билинейные функции тех же величин*), или целые однородные функции второй степени. Интеграл живых сил (7.11) является однородной функцией второй степени относительно составляющих скоростей, но относительно координат является функцией иррациональной, так как содержит координаты под знаками квадратных корней.

Знание только десяти первых интегралов задачи является совершенно недостаточным (при $n>1$) для ее решения, а поэтому издавна предпринимались попытки найти остальные недостающие интегралы или хотя бы некоторые из них, кроме классических.

Все эти попытки оставались безуспешными, но продолжались упорно до конца 19-го столетия, пока не выяснилось, что они совершенно бесполезны.

Действительно, в 1887 г. Брунс доказал, что уравнения движения (7.1) или (7.1′) для $n=2$ (т. е. для задачи трех тел) не имеют никаких других интегралов, левые части которых были бы алгебраическими функциями прямоугольных координат и их производных.

Доказательство Брунса было вскоре распространено французским математиком Пенлеве на задачу какого угодно (конечного!) числа тел. В 1889 г. Пуанкаре, рассматривая задачу трех тел, доказал, что уравнения движения не имеют даже трансцендентных интегралов, выражающихся через однозначные ана-

---

*) То есть левые части интегралов площадей линейны в отдельности относительно координат ξ, η, ζ и в отдельности относительно скоростей $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$.

литические функции, а Пенлеве обобщил и это доказательство на задачу многих тел *).

Упомянутые доказательства показывают, что вопрос о нахождении новых интегралов задачи многих тел (даже ее простейшего случая — задачи трех тел) имеет теперь только теоретическое значение, так как эти интегралы были бы чрезвычайно сложными для того, чтобы иметь какое-либо практическое приложение.

Посмотрим теперь, какую пользу может нам принести знание известных, классических интегралов.

Так как знание каждого первого интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет принципиально понизить порядок системы на одну единицу, то при помощи десяти классических интегралов уравнений (7.1) мы имеем возможность понизить порядок этой системы на десять единиц.

Это преобразование можно выполнить, во всяком случае теоретически, либо исключая из уравнений движения, записанных в виде системы уравнений первого порядка, какие-нибудь десять из неизвестных функций либо выражая все $6n+6$ неизвестных через $6n-4$ новых независимых переменных, которые могут быть выбраны совершенно произвольно, при том лишь условии, чтобы все классические интегралы тождественно удовлетворялись.

Получив тем или иным способом из системы (7.1) систему уравнений $6n-4$-го порядка, мы можем понизить порядок полученной системы еще на одну единицу, исключая dt (время t явно в уравнения движения не входит!) и принимая, таким образом, за независимую переменную одну из определяемых функций. Когда преобразованная таким образом система будет проинтегрирована (если это возможно, разумеется), время t найдется при помощи одной квадратуры и общая задача приведется, следовательно, к интегрированию системы $6n-5$-го порядка и к одной квадратуре.

Наконец, можно еще понизить порядок системы на одну единицу, используя то обстоятельство, что действующие силы зависят исключительно от взаимных расстояний между точками системы.

Окончательно, после всех указанных приведений, мы получим систему уравнений, порядок которой равен $6n-6$ и после

*) Доказательства теорем Брунса и Пуанкаре можно найти в сокращенном виде в книге Е. Т. Уиттекера, Аналитическая динамика, перев. с англ., ОНТИ, 1937. См. также Г. Н. Дубошин, Небесная механика. Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964, и Уинтнер, Аналитические основы небесной механики, перев. с англ., «Наука», 1967.

интегрирования которой нужно будет выполнить еще две квадратуры.

Однако, хотя все указанные приведения и можно выполнить фактически ценой весьма громоздких и сложных выкладок, но они приводят к очень сложным и несимметричным уравнениям, рассмотрение которых мало облегчает дальнейшее решение задачи.

Действительно, для главной задачи небесной механики — задачи о движении больших планет солнечной системы, где число планет равно девяти *), первоначальный порядок уравнений абсолютного движения есть $6 \cdot 9 + 6 = 60$. Если выполнить все возможные понижения порядка, то мы получим систему уравнений $6 \cdot 9 - 6 = 48$, для которой мы не знаем никаких интегралов, а поэтому можем решать ее только приближенными методами.

Но ясно, что для процедуры приближенного решения почти совершенно безразлично, будет ли порядок системы равен 60 или 48, а сложность уравнений, наоборот, имеет весьма существенное значение.

Легко только понизить порядок системы (7.1) на шесть единиц при помощи интегралов движения центра масс. Действительно, левые части интегралов (7.8‴) линейны, как уже отмечалось, относительно координат и составляющих скоростей точек системы, а это обстоятельство и позволяет без всякого труда выполнить преобразования, связанные с использованием этих интегралов. При этом очевидно, что понижение порядка можно произвести бесчисленным множеством способов, из которых естественно выбрать наиболее простые и удобные.

Важнейшие из этих способов мы рассмотрим в следующем параграфе.

5. В заключение этого параграфа, посвященного дифференциальным уравнениям абсолютного движения, используем последнее свойство силовой функции — свойство ее однородности, выражаемое формулой (7.7) — для вывода одного замечательного уравнения, связывающего только взаимные расстояния между материальными точками.

Для этого умножим уравнения (7.1) соответственно на ξ_i, η_i, ζ_i и просуммируем затем по i от нуля до n.

В силу формулы (7.7) мы получим

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i) = -U.$$

*) Меркурий, Венера, Земля с Луной, Марс со спутниками, Юпитер со спутниками, Сатурн со спутниками, Уран со спутниками, Нептун со спутниками и Плутон.

Складывая это равенство с интегралом живых сил (7.11), умноженным на 2, найдем

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \left(\xi_i \ddot{\xi}_i + \dot{\xi}_i^2 + \eta_i \ddot{\eta}_i + \dot{\eta}_i^2 + \zeta_i \ddot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i^2\right) = U + 2h,$$

что можно переписать также в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\xi_i \dot{\xi}_i + \eta_i \dot{\eta}_i + \zeta_i \dot{\zeta}_i\right) = U + 2h,$$

или в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2\right) = 2U + 4h. \tag{7.12}$$

Положим

$$I = \sum_{i=0}^{n} m_i \left(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2\right), \tag{7.13}$$

так что I есть момент инерции всей системы материальных точек относительно начала координат.

Тогда уравнение (7.12) напишется чрезвычайно просто следующим образом:

$$\ddot{I} = 2U + 4h. \tag{7.12$'$}$$

Уравнение (7.12′), связывающее полярный момент инерции системы с ее силовой функцией, зависит от выбора системы координат, так как содержит расстояния r_i точек системы M_i до начала координат O.

Преобразуем теперь это уравнение таким образом, чтобы вместо расстояний r_i в него входили только взаимные расстояния Δ_{ij}.

Для этого используем следующее алгебраическое тождество, называемое тождеством Лагранжа и которое легко проверить непосредственно:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i^2 \times \sum_{i=0}^{k} b_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} (a_i b_j - a_j b_i)^2, \tag{7.14}$$

где a_i и b_i обозначают какие угодно величины и k есть любое целое положительное число.

Полагая в тождестве (7.14) $k = n$ и заменяя a_i на $\sqrt{m_i}$, а b_i, последовательно, на $\sqrt{m_i}\,\xi_i$, $\sqrt{m_i}\,\eta_i$, $\sqrt{m_i}\,\zeta_i$, мы будем иметь три следующие тождества:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \times \sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j (\xi_j - \xi_i)^2,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \times \sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j (\eta_j - \eta_i)^2,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \times \sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j (\zeta_j - \zeta_i)^2,$$

складывая которые, получим

$$mI = m \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j \Delta_{ij}^2. \tag{7.15}$$

Используя теперь формулы (7.8″), мы напишем равенство (7.15) в следующем виде:

$$mI = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j \Delta_{ij}^2 + (a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 + (a_3 t + b_3)^2. \tag{7.16}$$

Положим

$$R = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j \Delta_{ij}^2. \tag{7.17}$$

Очевидно, что R есть величина, не зависящая от выбора системы координат, имеющая размерность момента инерции. Теперь равенство (7.16) напишется в виде

$$I = \frac{1}{m} \left[(a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 + (a_3 t + b_3)^2\right] + R. \tag{7.16′}$$

Дифференцируя дважды это равенство по t, найдем

$$\ddot{I} = \frac{2}{m}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + \ddot{R},$$

а исключая из этого равенства и из (7.12′) величину $\ddot{I}$, получим

$$\ddot{R} = 2U + 4h', \tag{7.17′}$$

где

$$h' = h - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2m}.$$

Уравнение (7.17′), связывающее только взаимные расстояния между материальными точками и не зависящее поэтому от выбора системы координат, играет важную роль в качественных исследованиях движений небесных тел и называется уравнением Лагранжа — Якоби*).

§ 3. Дифференциальные уравнения относительного движения задачи многих тел

Дифференциальные уравнения абсолютного движения взаимно притягивающихся материальных точек мало удобны для практического использования при изучении движений реальных небесных тел.

Действительно, формулы, служащие для вычисления эфемерид, должны содержать численные значения произвольных постоянных интегрирования, которые в свою очередь определяются заданными числовыми значениями координат и их производных в начальный момент t_0.

Но известно, что определить из наблюдений абсолютные координаты и абсолютные скорости небесных тел принципиально невозможно. Поэтому пользоваться абсолютной, в строгом смысле этого слова, системой координат для изучения движений небесных тел мы также не можем. Если же условиться называть абсолютными координатами числа, определяющие положения небесных тел в изучаемой системе (например, в солнечной системе) относительно другой небесной системы, весьма удаленной от рассматриваемой, то здесь мы сталкиваемся с затруднениями чисто технического характера. В самом деле, при современном состоянии астрономической техники невозможно определить при помощи астрономических инструментов координаты планет, например, относительно системы координат, связанной с Галактикой. Поэтому пользоваться абсолютными и в таком понимании этого слова координатами мы также фактически не можем.

Астрономические наблюдения дают нам только относительные положения и скорости небесных тел, а поэтому естественно и удобно ставить задачу об определении относительных движений.

1. В предыдущем параграфе мы установили, что центр масс системы материальных точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ движется относительно абсолютных осей координат прямолинейно и равномерно. Это свойство определяет движение всей системы в целом

*) Эти свойства рассматриваются в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы», «Наука», 1964. Одно применение формулы (7.17′) будет дано в гл. XIII.