Уравнение (7.17′), связывающее только взаимные расстояния между материальными точками и не зависящее поэтому от выбора системы координат, играет важную роль в качественных исследованиях движений небесных тел и называется уравнением Лагранжа—Якоби*).

§ 3. Дифференциальные уравнения относительного движения задачи многих тел

Дифференциальные уравнения абсолютного движения взаимно притягивающихся материальных точек мало удобны для практического использования при изучении движений реальных небесных тел.

Действительно, формулы, служащие для вычисления эфемерид, должны содержать численные значения произвольных постоянных интегрирования, которые в свою очередь определяются заданными числовыми значениями координат и их производных в начальный момент t_0.

Но известно, что определить из наблюдений абсолютные координаты и абсолютные скорости небесных тел принципиально невозможно. Поэтому пользоваться абсолютной, в строгом смысле этого слова, системой координат для изучения движений небесных тел мы также не можем. Если же условиться называть абсолютными координатами числа, определяющие положения небесных тел в изучаемой системе (например, в солнечной системе) относительно другой небесной системы, весьма удаленной от рассматриваемой, то здесь мы сталкиваемся с затруднениями чисто технического характера. В самом деле, при современном состоянии астрономической техники невозможно определить при помощи астрономических инструментов координаты планет, например, относительно системы координат, связанной с Галактикой. Поэтому пользоваться абсолютными и в таком понимании этого слова координатами мы также фактически не можем.

Астрономические наблюдения дают нам только относительные положения и скорости небесных тел, а поэтому естественно и удобно ставить задачу об определении относительных движений.

1. В предыдущем параграфе мы установили, что центр масс системы материальных точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ движется относительно абсолютных осей координат прямолинейно и равномерно. Это свойство определяет движение всей системы в целом

*) Эти свойства рассматриваются в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы», «Наука», 1964. Одно применение формулы (7.17′) будет дано в гл. XIII.

и позволяет нам ограничиться изучением движений отдельных ее точек относительно общего центра масс.

Рассмотрим уравнения движения системы взаимно притягивающихся точек в абсолютных осях:

$$m_i\ddot{\xi}_i = \Xi_i, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \mathrm{H}_i, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \mathrm{Z}_i \tag{7.18}$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\Xi_i = f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \ \ldots \tag{7.18$'$}$$

зависят только от разностей одноименных координат точек M_i и являются частными производными от силовой функции

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \tag{7.19}$$

Пусть G — центр масс всей системы и $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ — его абсолютные координаты, которые в силу интегралов движения центра масс суть линейные функции времени (см. формулы (7.9$'$)).

Перейдем теперь от абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к относительной, начало которой возьмем в точке G_0. Оси этой новой системы координат $G\xi'\eta'\zeta'$ примем параллельными соответствующим осям старой системы, так что переход от прежней системы (абсолютной) к новой (относительной) определяется формулами параллельного преобразования координат *).

Таким образом, если ξ_i', η_i', ζ_i' суть новые координаты точки M_i, то имеем следующие формулы преобразования:

$$\xi_i = \xi_i' + \bar{\xi}, \quad \eta_i = \eta_i' + \bar{\eta}, \quad \zeta_i = \zeta_i' + \bar{\zeta}. \tag{7.20}$$

Из этих формул следует, что преобразованные дифференциальные уравнения движения будут иметь в точности такой же вид, как и первоначальные уравнения (7.18). Действительно, так как величины $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ суть линейные функции времени, то их вторые производные тождественно равны нулю, а, с другой стороны,

$$\xi_j - \xi_i = \xi_j' - \xi_i', \ \ldots$$

для всякой пары значков i и j.

*) Введенная нами система координат с началом в центре масс всей системы материальных точек называется иногда «барицентрической» системой, а координаты ξ', η', ζ' — «барицентрическими» координатами.

Поэтому уравнения относительного движения в барицентрической системе координат напишутся следующим образом:

$$m_i\ddot{\xi}'_i = \Xi'_i, \quad m_i\ddot{\eta}'_i = \mathrm{H}'_i, \quad m_i\ddot{\zeta}'_i = \mathrm{Z}'_i \tag{7.18'}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\Xi'_i = f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\xi'_j - \xi'_i}{\Delta^3_{ij}},$$

и аналогичные выражения имеем для величин H'_i и Z'_i.

Выражение для силовой функции (7.19) не изменится, а взаимные расстояния в новой системе координат определятся формулой

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi'_j - \xi'_i)^2 + (\eta'_j - \eta'_i)^2 + (\zeta'_j - \zeta'_i)^2}.$$

Очевидно, что мы имеем также

$$\Xi'_i = \frac{\partial U}{\partial \xi'_i}, \quad \mathrm{H}'_i = \frac{\partial U}{\partial \eta'_i}, \quad \mathrm{Z}'_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta'_i},$$

так что уравнения, определяющие барицентрические координаты, могут быть написаны еще в виде *)

$$m_i\ddot{\xi}'_i = \frac{\partial U}{\partial \xi'_i}, \quad m_i\ddot{\eta}'_i = \frac{\partial U}{\partial \eta'_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}'_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta'_i}. \tag{7.18''}$$

Уравнения (7.18′) и (7.18″) имеют такой же вид, как и уравнения (7.1) и (7.1′) соответственно. Поэтому уравнения относительного движения в барицентрической системе имеют такие же первые интегралы, как и уравнения абсолютного движения. При этом, к тому же, интегралы движения центра масс тождественно удовлетворяются, так как в новой системе координат центр масс совпадает с началом координат G и остается неподвижным.

---

*) Уравнения (7.18″) легко вывести также из уравнений Лагранжа (6.8′). В самом деле, живая сила T в новых координатах имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\left(\dot{\xi}'_i + \frac{a_1}{m}\right)^2 + \left(\dot{\eta}'_i + \frac{a_2}{m}\right)^2 + \left(\dot{\zeta}'_i + \frac{a_3}{m}\right)^2\right].$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}'_i} = m_i\left(\dot{\xi}'_i + \frac{a_1}{m}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}'_i}\right) = m_i\ddot{\xi}'_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi'_i} = 0$$

и, следовательно, уравнения Лагранжа приводятся опять к уравнениям (7.18″). Следует заметить, что при этом преобразовании роль обобщенных координат q играют барицентрические координаты.

Следовательно, относительные координаты точек системы в барицентрической системе не являются независимыми и связаны между собой следующими тремя соотношениями:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\xi'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\eta'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta'_i = 0. \tag{7.21}$$

Такими же соотношениями связаны производные (относительные скорости) от барицентрических координат

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}'_i = 0. \tag{7.21$'$}$$

Из этих соотношений мы можем выразить какие-нибудь три из переменных ξ', η', ζ', например, координаты ξ'_0, η'_0, ζ'_0 точки M_0, через остальные, что дает

$$\xi'_0 = -\frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{n} m_i\xi'_i, \quad \eta'_0 = -\frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{n} m_i\eta'_i, \quad \zeta'_0 = -\frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{n} m_i\zeta'_i. \tag{7.21$''$}$$

Исключая при помощи этих формул неизвестные ξ'_0, η'_0; ζ'_0 из уравнений (7.18′), мы получим систему $3n$ уравнений второго порядка с $3n$ неизвестными — координатами точек $M_1, \ldots, M_n$.

Таким образом, порядок преобразованной системы уравнений будет равен $6n$, т. е. на шесть единиц меньше порядка системы уравнений абсолютного движения.

Нетрудно убедиться, что преобразованная система уравнений движения может быть написана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\xi}'_i &= -\frac{(m_0+m_i)\xi'_i + \sum\limits_{j=1}^{n}{}' m_j\xi'_j}{\Delta_{i0}^3} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\frac{\xi'_j-\xi'_i}{\Delta_{ij}^3},\\
\ddot{\eta}'_i &= -\frac{(m_0+m_i)\eta'_i + \sum\limits_{j=1}^{n}{}' m_j\eta'_j}{\Delta_{i0}^3} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\frac{\eta'_j-\eta'_i}{\Delta_{ij}^3},\\
\ddot{\zeta}'_i &= -\frac{(m_0+m_i)\zeta'_i + \sum\limits_{j=1}^{n}{}' m_j\zeta'_j}{\Delta_{i0}^3} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\frac{\zeta'_j-\zeta'_i}{\Delta_{ij}^3},
\end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

где

$$m_0\Delta_{i0}^2 = \left[(m_0+m_i)\xi'_i + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j\xi'_j\right]^2 + \left[(m_0+m_i)\eta'_i + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j\eta'_j\right]^2 + \left[(m_0+m_i)\zeta'_i + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j\zeta'_j\right]^2.$$

Уравнения (7.22) имеют только четыре первых интеграла, а именно — три интеграла площадей и интеграл живых сил.

Эти интегралы можно, конечно, вывести непосредственно из уравнений (7.22) при помощи процедуры, аналогичной (но более громоздкой) той, которая позволила вывести интегралы абсолютных уравнений движения. Но проще поступить иначе. Напишем сначала соответствующие интегралы системы (7.18″), которые, как уже замечено, имеют такой же вид, как и интегралы уравнений абсолютного движения, а затем исключим из написанных интегралов координаты и компоненты скорости точки M_0 при помощи формул (7.21) и (7.21′).

В результате мы получим следующие интегралы:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{m_0}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j\eta'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\zeta}'_j - \sum_{j=1}^{n} m_j\zeta'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\eta}'_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\eta'_i\dot{\zeta}'_i - \zeta'_i\dot{\eta}'_i\right) = c'_1, \\
&\frac{1}{m_0}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j\zeta'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\xi}'_j - \sum_{j=1}^{n} m_j\xi'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\zeta}'_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\zeta'_i\dot{\xi}'_i - \xi'_i\dot{\zeta}'_i\right) = c'_2, \\
&\frac{1}{m_0}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j\xi'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\eta}'_j - \sum_{j=1}^{n} m_j\eta'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\xi}'_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\xi'_i\dot{\eta}'_i - \eta'_i\dot{\xi}'_i\right) = c'_3,
\end{aligned}
\right\} \qquad (7.22')
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2m_0}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\xi}'_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\eta}'_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} m_j\zeta'_j\right)^2\right] + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\xi}'^2_i + \dot{\eta}'^2_i + \dot{\zeta}'^2_i\right) = U + h', \qquad (7.22'')
\end{aligned}
$$

где c'_1, c'_2, c'_3 и и h' — суть произвольные постоянные, определяемые начальными значениями барицентрических координат и их производных точек $M_1, \ldots, M_n$.

Мы видим, что уравнения (7.22) и их интегралы имеют более сложный и громоздкий вид, чем соответствующие уравнения абсолютного движения.

Заметим, что уравнения (7.22) можно, конечно, записать и в виде (7.18″), но индекс i будет принимать значения только 1, 2, ..., n, а из силовой функции U должны быть исключены координаты точки M_0 при помощи формул (7.21″).

2. Перейдем теперь от барицентрической системы координат к другой относительной системе, иногда более удобной, с началом в одной из движущихся точек M_i и с неизменными направлениями осей.

Возьмем за начало новой системы координат точку M_0, а новые оси $\overrightarrow{M_0x}$, $\overrightarrow{M_0y}$, $\overrightarrow{M_0z}$ будем считать параллельными соответственным осям старой системы $G\xi'\eta'\zeta'$ или, что то же, осям абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ *).

Обозначая координаты точки M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) буквами x_i, y_i, z_i, имеем по формулам параллельного преобразования координат

$$x_i=\xi_i'-\xi_0', \quad y_i=\eta_i'-\eta_0', \quad z_i=\zeta_i'-\zeta_0'. \tag{7.23}$$

Используя формулы (7.21″), мы исключим координаты точки M_0 и выразим координаты остальных точек в новой системе только через барицентрические координаты тех же точек, т. е. получим

$$m_0x_i=(m_0+m_i)\xi_i'+\sum_{j=1}^{n}{}' m_i\xi_j', \tag{7.23′}$$

и подобные же выражения для двух других координат.

Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие относительные координаты x_i, y_i, z_i, продифференцируем прежде всего дважды формулы (7.23), что дает **)

$$\ddot{x}_i=\ddot{\xi}_i'-\ddot{\xi}_0',$$

а затем заменим $\ddot{\xi}_i'$ и $\ddot{\xi}_0'$ их выражениями из уравнений (7.22) и (7.18′).

Обозначая расстояния точек M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) до точки M_0 через r_i, т. е. полагая

$$\Delta_{i0}=r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2},$$

*) Система $M_0\,xyz$ не имеет общего названия. Если же рассматривается задача о движении больших планет и если точка M_0 изображает Солнце, то эта система координат называется гелиоцентрической. Если рассматривается задача о движении спутников (естественных или искусственных) и точка M_0 изображает центральную планету, то система $M_0\,xyz$ называется обычно по имени планеты, т. е. геоцентрической, селеноцентрической, ареоцентрической (по греческому имени планеты Марс—Арес), венероцентрической, сатурноцентрической и т. д.

**) Для сокращения мы проделаем необходимые выкладки только для одного уравнения, после чего два других напишем по аналогии.

и имея в виду, что

$$\xi_j' - \xi_i' = x_j - x_i, \ \ldots,$$

мы с помощью формул (7.23) будем иметь

$$\ddot{x}_i = -f\frac{m_0 x_i}{r_i^3} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - f\frac{m_i x_i}{r_i^3} - f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{x_j}{r_j^3},$$

где

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2},$$

и штрих при знаке суммы по-прежнему обозначает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j = i$.

Окончательно мы напишем уравнения относительного движения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_i + f(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3}\right),\\
\ddot{y}_i + f(m_0 + m_i)\frac{y_i}{r_i^3} &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3}\right),\\
\ddot{z}_i + f(m_0 + m_i)\frac{z_i}{r_i^3} &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3}\right)\\
&(i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

Правые части этих уравнений можно представить также в виде частных производных от некоторых функций координат всех точек нашей материальной системы. Действительно, положим

$$R_i = f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j R_{ij} \tag{7.25}$$

$$R_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}. \tag{7.25'}$$

Тогда, как легко проверить непосредственно, имеем

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} = \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3}.$$

Полагая еще для сокращения

$$\mu_i = f(m_0 + m_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

мы представим уравнения (7.24) в следующей классической форме:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_i + \frac{\mu_i x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\
\ddot{y}_i + \frac{\mu_i y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\
\ddot{z}_i + \frac{\mu_i z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.24')$$

Функции R_i называются **возмущающими функциями** (или пертурбационными функциями), так как они определяют действия притяжений (возмущений), которые испытывают точки M_i со стороны всех остальных точек системы (кроме точки M_0). Это название — возмущающие функции — возникло в задаче о движении больших планет солнечной системы, массы которых малы по сравнению с массой Солнца — точки M_0. Действительно, каждая из девяти больших планет испытывает действие притяжения Солнца и действия притяжения всех остальных восьми планет. Так как массы всех больших планет достаточно малы по сравнению с массой Солнца (ни одна из этих масс не превышает одной тысячной доли массы Солнца), то действие Солнца является главной причиной, управляющей движениями каждой планеты, а действия всех остальных восьми планет весьма малы по сравнению с действием Солнца и могут (как это естественно кажется!) производить только незначительные, вообще говоря, изменения в движении каждой отдельной планеты вокруг Солнца. Эти незначительные изменения принято называть **возмущениями**, а отсюда и появилось название для функций R_i.

Следует отметить, что каждая из точек M_i имеет свою собственную функцию R_i, в то время как силовая функция — одна для всей системы.

Определив из уравнений (7.24′) относительные координаты x_i, y_i, z_i точек M_i, мы можем найти и барицентрические координаты всех точек системы.

Действительно, прибавляя к обеим частям формулы

$$m_0\xi_0' = -\sum_{j=1}^{n} m_j\xi_j'$$

величину $\xi_0' \sum\limits_{j=1}^{n} m_j$, мы получим $\left(m = \sum\limits_{l=0}^{n} m_l\right)$

$$m\xi_0' = -\sum_{j=1}^{n} m_j(\xi_j' - \xi_0') = -\sum_{j=1}^{n} m_j x_j,$$

откуда с помощью формул (7.23) найдем *)

$$\left.\begin{aligned}
\xi_i' &= x_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j,\\
\eta_i' &= y_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j y_j,\\
\zeta_i' &= z_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j z_j\\
&(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

Заменяя теперь в равенствах (7.22′) и (7.22″), которые являются интегралами уравнений (7.22), барицентрические координаты их выражениями (7.26), мы получим соответствующие интегралы уравнений относительного движения (7.24) (или (7.24′)). Произведем эту замену только в первом из уравнений (7.22′), ибо два других получаются из первого циклической перестановкой букв. Отметим прежде всего, что из формул (7.26) мы имеем

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \xi_j' = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{m_0}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j,$$

а следовательно, также

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\xi}_j' = \frac{m_0}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j,$$

и аналогичные формулы для двух других координат.

С помощью этих формул и соотношений (7.26) мы перепишем первый из интегралов (7.22′) следующим образом:

$$\frac{m_0}{m^2}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j y_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{z}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j z_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{y}_j\right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \left\{\left[y_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j y_j\right]\left[\dot{z}_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{z}_j\right] -\right.$$
$$\left. - \left[z_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j z_j\right]\left[\dot{y}_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{y}_j\right]\right\} = c_1',$$

*) Эти формулы пригодны также и для точки M_0, так как $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

откуда после упрощений получаем первый из интегралов системы уравнений относительного движения (7.24), а затем и два остальных циклической перестановкой букв, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{m}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j y_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{z}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j z_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{y}_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = c_1', \\
&-\frac{1}{m}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j z_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{z}_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = c_2', \\
&-\frac{1}{m}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{y}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j y_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = c_3'.
\end{aligned}\right\} \quad (7.27)$$

Преобразуя таким же образом равенство (7.22″), мы получим четвертый интеграл системы уравнений относительного движения, аналогичный интегралу живых сил в абсолютном движении.

Этот последний интеграл напишется в виде

$$-\frac{1}{2m}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i\right)^2\right] + \\
+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + h'. \quad (7.27')$$

Хотя равенства (7.27) и (7.27′) не имеют уже столь же ясного механического или геометрического значения, как в абсолютном движении, но и для них сохраняется та же терминология. Поэтому равенства (7.27) называются тоже *интегралами площадей*, а равенство (7.27′) — *интегралом живых сил* относительного движения.

Произвольные постоянные c_1', c_2', c_3' и h' могут быть определены через начальные значения

$$x_i^0,\ y_i^0,\ z_i^0,\ \dot{x}_i^0,\ \dot{y}_i^0,\ \dot{z}_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

относительных координат и их первых производных (составляющих относительных скоростей). Для солнечной системы, например, эти начальные значения могут быть выведены из результатов наблюдений планет, а значит, могут быть фактически определены.

Полученные интегралы позволяют понизить порядок системы уравнений (7.24) на четыре единицы, но это понижение фактически не производится, так как требует длинных и громоздких выкладок, в результате которых получаются слишком сложные и громоздкие уравнения, с которыми неудобно иметь дело на практике (т. е. для фактического вычисления эфемерид планет).

Поэтому интегралы (7.27) и (7.27′) не играют большой роли при решении задачи и могут быть использованы только для некоторых теоретических выводов или как контрольные формулы для некоторой (далеко не полной!) проверки правильности произведенных вычислений (например, на быстродействующих вычислительных машинах).

3. Уравнения (7.24) могут быть получены, конечно, также преобразованием уравнений абсолютного движения (7.1), так как из формул (7.20) и (7.23) следует также, что

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0.$$

Поэтому и интегралы (7.27) и (7.27′) можно вывести также и преобразованием интегралов абсолютного движения.

Уравнения (7.24) можно вывести также и непосредственно. Действительно, рассмотрим систему материальных точек M_0, M_1, ..., M_n, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, и условимся рассматривать движения точек M_1, M_2, ..., M_n относительно точки M_0.

Возьмем декартову систему прямоугольных координат M_0xyz с началом в точке M_0 и с неизменными направлениями осей.

Координаты точки M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ опять обозначим через x_i, y_i, z_i. Тогда проекции относительной скорости и относительного ускорения в движении точки M_i будут соответственно $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ и $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$, $\ddot{z}_i$.

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, нужно выразить составляющие ускорения через координаты движущихся точек, применяя второй закон динамики Ньютона, согласно которому составляющая ускорения точки по любой координатной оси равна сумме составляющих по той же оси всех сил, действующих на эту точку, поделенной на ее массу. Но это правило справедливо только для неподвижной системы координат и поэтому в нашем случае, где система координат движется вместе с точкой M_0, непосредственно неприменимо.

Чтобы иметь возможность применить второй закон Ньютона в этом случае, нужно предварительно «остановить» точку M_0, для чего необходимо сообщить этой точке ускорения, равные по величине и противоположные по направлениям тем ускорениям, которые ей сообщают притяжения точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Но тогда мы должны и каждой из точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ сообщить такие же ускорения, вследствие чего относительные движения точек M_i могут рассматриваться как абсолютные.

Подсчитаем теперь все ускорения, приложенные к точке M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ в проекции на ось $\overrightarrow{M_0x}$.

Прежде всего, точка M_i находится под действием притяжения точки M_0, что дает следующую составляющую полного ускорения $\ddot{x}_i$ этой точки:

$$-fm_0\frac{x_i}{r_i^3}.$$

Далее, как сказано выше, мы должны приложить к точке M_i составляющие ускорений

$$-fm_1\frac{x_1}{r_1^3},\quad -fm_2\frac{x_2}{r_2^3},\ \ldots,\ -fm_n\frac{x_n}{r_n^3},$$

представляющие собой величины, обратные по знаку составляющим ускорений, сообщаемых действиями притяжений точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$ движению точки M_0.

Наконец, точка M_i находится под действием притяжений всех остальных точек M_j $(j=1, 2, \ldots, n,\ j\neq i)$, которые дают следующие составляющие полного ускорения точки M_i:

$$-fm_1\frac{x_i-x_1}{\Delta_{i1}^3},\quad -fm_2\frac{x_i-x_2}{\Delta_{i2}^3},\ \ldots,\ -fm_n\frac{x_i-x_n}{\Delta_{in}^3}.$$

Складывая все выписанные составляющие, мы получим проекцию на ось абсцисс полного ускорения в движении точки M_i, что дает следующее равенство:

$$\ddot{x}_i=-fm_0\frac{x_i}{r_i^3}-fm_1\frac{x_1}{r_1^3}-\ldots-fm_n\frac{x_n}{r_n^3}+$$
$$+fm_1\frac{x_1-x_i}{\Delta_{i1}^3}+fm_2\frac{x_2-x_i}{\Delta_{i2}^3}+\ldots+fm_n\frac{x_n-x_i}{\Delta_{in}^3},$$

которое можно, очевидно, переписать в виде

$$\ddot{x}_i=-f(m_0+m_i)\frac{x_i}{r_i^3}+\sum_{j=1}^{n} m_j\left(\frac{x_j-x_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{x_j}{r_j^3}\right),$$

а это и есть первое из уравнений (7.24); остальные два уравнения получаются таким же образом.

Но, получив уравнения (7.24) непосредственно, не опираясь на уравнения абсолютного движения, мы не можем уже получить интегралы этих уравнений преобразованием известных интегралов уравнений абсолютного движения, а должны вывести эти интегралы из самих уравнений (7.24).

Это нетрудно сделать, но потребует выполнения довольно громоздких выкладок, которые для сокращения мы производить не будем, предоставляя читателю проделать эти выкладки в качестве полезного упражнения.

§ 4. Уравнения движения в координатах Якоби

1. Уравнения относительного движения системы взаимно притягивающихся материальных точек в виде (7.24) обладают тем существенным недостатком (уже отмеченным выше), что их правые части являются частными производными от различных функций, так как каждая из точек M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) имеет свою собственную возмущающую функцию R_i.

Этот недостаток, весьма существенный с теоретической точки зрения, можно устранить, выбирая относительные координаты каким-либо другим способом.

Рассмотрим преобразование переменных, называемое **преобразованием Якоби**.

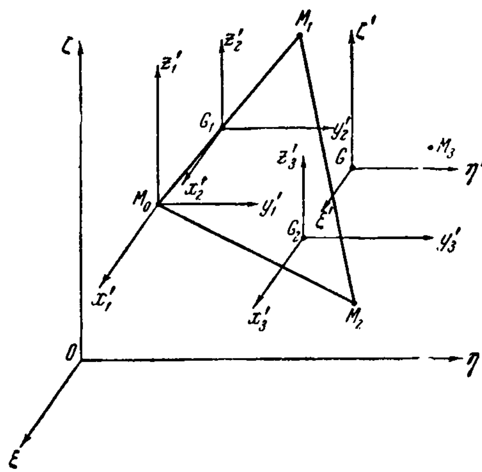

Рис. 42.

Обозначим через G_i центр масс подсистемы материальных точек $M_0, M_1, \ldots, M_i$ ($i=0, 1, 2, \ldots, n$), так что G_0 совпадает с M_0, а G_n есть центр масс всей системы, обозначенный ранее через G.

Введем в рассмотрение n систем прямоугольных координат, начало каждой из которых помещается в одной из точек G_j ($j=0, 1, \ldots, n-1$), а одноименные оси которых все параллельны друг другу и параллельны соответствующим осям барицентрической системы $G\xi'\eta'\zeta'$, а также, конечно, осям абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ (см. рис. 42 для случая $n=3$).

Пусть x_i', y_i', z_i' суть координаты точки M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) в системе координат $G_{i-1}x_i'y_i'z_i'$ с началом в точке G_{i-1}.