Но, получив уравнения (7.24) непосредственно, не опираясь на уравнения абсолютного движения, мы не можем уже получить интегралы этих уравнений преобразованием известных интегралов уравнений абсолютного движения, а должны вывести эти интегралы из самих уравнений (7.24).

Это нетрудно сделать, но потребует выполнения довольно громоздких выкладок, которые для сокращения мы производить не будем, предоставляя читателю проделать эти выкладки в качестве полезного упражнения.

§ 4. Уравнения движения в координатах Якоби

1. Уравнения относительного движения системы взаимно притягивающихся материальных точек в виде (7.24) обладают тем существенным недостатком (уже отмеченным выше), что их правые части являются частными производными от различных функций, так как каждая из точек M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ имеет свою собственную возмущающую функцию R_i.

Этот недостаток, весьма существенный с теоретической точки зрения, можно устранить, выбирая относительные координаты каким-либо другим способом.

Рассмотрим преобразование переменных, называемое **преобразованием Якоби**.

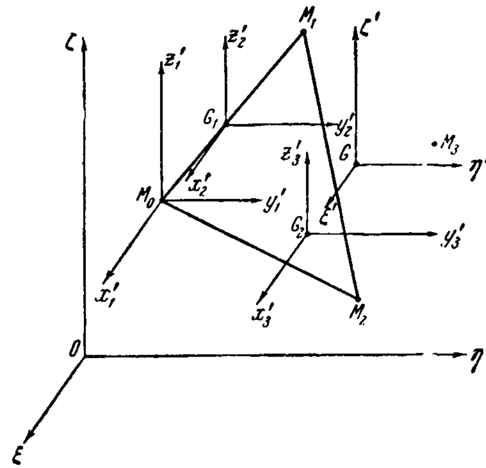

Рис. 42.

Обозначим через G_i центр масс подсистемы материальных точек $M_0, M_1, \ldots, M_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, так что G_0 совпадает с M_0, а G_n есть центр масс всей системы, обозначенный ранее через G.

Введем в рассмотрение n систем прямоугольных координат, начало каждой из которых помещается в одной из точек G_j $(j=0, 1, \ldots, n-1)$, а одноименные оси которых все параллельны друг другу и параллельны соответствующим осям барицентрической системы $G\xi'\eta'\zeta'$, а также, конечно, осям абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ (см. рис. 42 для случая $n=3$).

Пусть x'_i, y'_i, z'_i суть координаты точки M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ в системе координат $G_{i-1}x'_iy'_iz'_i$ с началом в точке G_{i-1}.

Покажем, что относительные координаты x'_i, y'_i, z'_i, называемые также **координатами Якоби**, определяются уравнениями, имеющими симметричный вид и содержащими частные производные от одной и той же функции, а именно, от силовой функции U материальной системы.

Для вывода дифференциальных уравнений в координатах Якоби воспользуемся уравнениями Лагранжа (см. § 1 гл. VI), принимая за обобщенные координаты q_j координаты Якоби x'_i, y'_i, z'_i. Тогда искомые дифференциальные уравнения можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x'_i}=\frac{\partial U}{\partial x'_i}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial y'_i}=\frac{\partial U}{\partial y'_i}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial z'_i}=\frac{\partial U}{\partial z'_i}, \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

и нам остается только выразить живую силу системы T и силовую функцию U через новые координаты.

Так как выражения для T и для U в функции барицентрических или абсолютных координат нам известны, то наша задача приводится теперь к нахождению формул, связывающих координаты Якоби с барицентрическими или с абсолютными координатами.

Более удобно найти соотношения между координатами Якоби и барицентрическими координатами, а поэтому выведем формулы преобразования, связывающие величины x'_i, y'_i, z'_i с величинами ξ'_i, η'_i, ζ'_i.

Обозначим барицентрические координаты точки G_j через $\bar{\xi}'_j$, $\bar{\eta}'_j$, $\bar{\zeta}'_j$. Тогда формулы параллельного преобразования координат дают соотношения

$$\xi'_i=x'_i+\bar{\xi}'_{i-1}, \quad \eta'_i=y'_i+\bar{\eta}'_{i-1}, \quad \zeta'_i=z'_i+\bar{\zeta}'_{i-1} \tag{7.29}$$

и

$$x'_i=\xi'_i-\bar{\xi}'_{i-1}, \quad y'_i=\eta'_i-\bar{\eta}'_{i-1}, \quad z'_i=\zeta'_i-\bar{\zeta}'_{i-1}. \tag{7.29'}$$

Обозначим далее через σ_i массу подсистемы материальных точек M_0, M_1, ..., M_i, т. е. положим

$$\sigma_i=m_0+m_1+\ldots+m_{i-1}+m_i=\sum_{j=0}^{i} m_j,$$

причем очевидно, что $\sigma_0=m_0$ и $\sigma_n=m$.

Тогда по свойствам центра масс системы материальных точек имеем *)

$$\sigma_i \bar{\xi}'_i = \sum_{j=0}^{i} m_j \xi'_j \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{7.30}$$

Теперь формулы (7.29′) дают

$$\sigma_{i-1} x'_i = \sigma_{i-1} \xi'_i - \sigma_{i-1} \bar{\xi}'_{i-1} = \xi'_i \sum_{j=0}^{i-1} m_j - \sum_{j=0}^{i-1} m_j \xi'_j,$$

откуда находим

$$x'_i = \frac{1}{\sigma_{i-1}} \sum_{j=0}^{i-1} m_j (\xi'_i - \xi'_j). \tag{7.31}$$

Таким образом, формулы (7.31) выражают новые координаты точек (координаты Якоби) через старые (барицентрические) **).

Выразим теперь, наоборот, барицентрические координаты через координаты Якоби.

Для этого заметим прежде всего, что из формул (7.30) вытекает следующее соотношение ***):

$$m_k \xi'_k = \sigma_k \bar{\xi}'_k - \sigma_{k-1} \bar{\xi}'_{k-1}. \tag{7.32}$$

Заменяя в (7.32) m_k на $\sigma_k - \sigma_{k-1}$, а координаты точек G_k и G_{k-1} их выражениями из (7.29), мы получим

$$(\sigma_k - \sigma_{k-1}) \xi'_k = \sigma_k (\xi'_{k+1} - x'_{k+1}) - \sigma_{k-1} (\xi'_k - x'_k),$$

откуда найдем

$$\xi'_{k+1} - \xi'_k = x'_{k+1} - \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} x'_k. \tag{7.32′}$$

Придавая здесь индексу k значения $0, 1, 2, \ldots, i-1$ и складывая получающиеся равенства, будем иметь ****)

$$\xi'_i - \xi'_0 = x_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}. \tag{7.32″}$$

Умножая равенства (7.32″) соответственно на m_i и суммируя по i от 1 до n, мы получим (используя также формулы (7.21″))

$$\xi'_0 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}, \tag{7.32‴}$$

*) Очевидно, достаточно писать все формулы и производить все выкладки только для одной координаты, например, для абсциссы.

**) В частности, формулы (7.31) дают $x'_1 = \xi'_1 - \xi'_0$, что очевидно.

***) Здесь просто сумма разбита на две части и индекс i заменен на k.

****) Так как $\xi'_i - \xi'_0 = x_i$, то формулы (7.32″) связывают также координаты, отнесенные к системе $M_0 xyz$ с координатами Якоби.

что дает ξ'_0, после чего формулы (7.32″) дадут и все остальные барицентрические координаты

$$\xi'_i = x'_i - \sum_{k=i}^{n} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}. \tag{7.33}$$

Эти формулы показывают, что якобиевские координаты точек M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ полностью определяют положение всей системы $n+1$ точек в барицентрической, а значит, и в абсолютной системе координат.

Теперь из формул (7.32″) выводим также, считая $j>i$,

$$\xi'_j - \xi'_i = x'_j - x'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k},$$

что позволяет выразить через новые координаты все взаимные расстояния между точками, а значит, также и силовую функцию U.

2. Найдем теперь выражение для живой силы T. Заменим для этого в формуле (7.32), написанной для $k=i$, величину ξ'_i ее выражением (7.29), что дает

$$m_i x'_i = \sigma_i \bar{\xi}'_i - \sigma_i \bar{\xi}'_{i-1}.$$

Дифференцируя это соотношение и то, из которого оно получено, мы имеем два следующих равенства:

$$m_i \dot{\xi}'_i = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_i - \sigma_{i-1} \dot{\bar{\xi}}'_{i-1},$$

$$m_i \dot{x}'_i = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_i - \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_{i-1}.$$

Возводя каждое из этих равенств в квадрат и исключая из полученных равенств произведение $\dot{\bar{\xi}}'_i \dot{\bar{\xi}}'_{i-1}$, найдем следующее соотношение:

$$m_i \dot{\xi}'^2_i - \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}'^2_i = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'^2_i - \sigma_{i-1} \dot{\bar{\xi}}'^2_{i-1},$$

из которого, суммируя по i от 1 до n, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\xi}'^2_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}'^2_i = \sigma_n \dot{\bar{\xi}}'^2_n - \sigma_0 \dot{\bar{\xi}}'^2_0.$$

Но $\bar{\xi}'_0 = \xi'_0$ и $\bar{\xi}'_n = 0$, так что имеем окончательно

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\xi}'^2_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}'^2_i.$$

Написав подобные же равенства для двух других координат, мы выведем, что

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i'^2 + \dot{\eta}_i'^2 + \dot{\zeta}_i'^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\sigma_i}\left(\dot{x}_i'^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2\right).$$

Величина T' отличается от живой силы T только на постоянную. Действительно, мы можем написать

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[(\dot{\xi}_i' + \dot{\bar{\xi}})^2 + (\dot{\eta}_i' + \dot{\bar{\eta}})^2 + (\dot{\zeta}_i' + \dot{\bar{\zeta}})^2\right] =$$

$$= T' + \dot{\bar{\xi}}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i' + \dot{\bar{\eta}}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i' + \dot{\bar{\zeta}}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i' + \frac{m}{2}(\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2 + \dot{\bar{\zeta}}^2),$$

откуда, используя свойства центра масс, найдем

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i'\left(\dot{x}_i'^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2\right) + \frac{1}{2m}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2), \tag{7.34}$$

где положено

$$m_i' = \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\sigma_i} = \frac{m_i(m_0 + m_1 + \ldots + m_{i-1})}{m_0 + m_1 + \ldots + m_{i-1} + m_i} \tag{7.34'}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Постоянные m_i', зависящие только от масс материальных точек, называются иногда «приведенными массами». Легко видеть, что если масса m_0 значительно превосходит все остальные массы (как это имеет место в солнечной системе, если точка M_0 обозначает Солнце), то истинные массы m_i и приведенные массы m_i' суть величины одного и того же порядка.

Теперь по формулам (7.28) получим окончательно уравнения движения нашей материальной системы в координатах Якоби в следующей симметричной форме:

$$\left.\begin{aligned} m_i'\ddot{x}_i' &= \frac{\partial U}{\partial x_i'}, \\ m_i'\ddot{y}_i' &= \frac{\partial U}{\partial y_i'}, \\ m_i'\ddot{z}_i' &= \frac{\partial U}{\partial z_i'} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7.35}$$

где силовая функция определяется обычной формулой

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{7.36}$$

но взаимные расстояния Δ_{ij} выражаются через координаты Якоби более сложно, чем через абсолютные координаты. Действительно, мы имеем

$$\Delta_{ij}^2 = \left(x'_j - x'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \\ + \left(y'_j - y'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \left(z'_j - z'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k}\right)^2.$$

Уравнения (7.35) образуют систему $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка, так что общий порядок системы есть $6n$, т. е. на шесть единиц ниже порядка системы уравнений абсолютного движения.

Уравнения (7.35) можно, конечно, вывести также прямым преобразованием при помощи формул (7.32″) и (7.33) из уравнений (7.18″). Поэтому и интегралы системы (7.35) можно получить из интегралов системы (7.18″) при помощи такого же преобразования.

При этом легко проверить, что соотношения (7.21) и (7.21′) удовлетворяются тождественно, а интегралы площадей и живой силы напишутся совершенно в такой же форме, как и соответствующие интегралы системы (7.18″), или как интегралы уравнений абсолютного движения *).

Таким образом, система (7.35) имеет следующие четыре интеграла:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m'_i(y'_i \dot{z}'_i - z'_i \dot{y}'_i) &= c'_1, \\ \sum_{i=1}^{n} m'_i(z'_i \dot{x}'_i - x'_i \dot{z}'_i) &= c'_2, \\ \sum_{i=1}^{n} m'_i(x'_i \dot{y}'_i - y'_i \dot{x}'_i) &= c'_3, \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m'_i\left(\dot{x}'^2_i + \dot{y}'^2_i + \dot{z}'^2_i\right) = U + h', \tag{7.37′}$$

---

*) Соотношения (7.21) и (7.21′) нельзя называть, как это иногда делают, интегралами уравнений движения. Действительно, эти равенства не содержат никаких произвольных постоянных, а поэтому их можно назвать только разве инвариантными соотношениями, позволяющими исключить из уравнений движения какие-либо три координаты какой-либо из точек системы.

произвольные постоянные которых могут быть определены через начальные значения

$$x_i'^0,\ y_i'^0,\ z_i'^0,\ \dot{x}_i'^0,\ \dot{y}_i'^0,\ \dot{z}_i'^0$$

координат Якоби и их первых производных.

Уравнения (7.35) можно также рассматривать как дифференциальные уравнения абсолютного движения системы n «фиктивных» материальных точек M_i', обладающих массами m_i', в поле сил, определяемом силовой функцией U, зависящей только от координат x_i', y_i', z_i' этих точек.

Тогда интегралы площадей и интеграл живых сил можно написать сразу, основываясь на свойствах силовой функции, зависящей только от взаимных расстояний между точками и остающейся поэтому инвариантной при преобразовании координат.

Заметим еще, что интеграл живых сил следует также из уравнений (7.28) в силу свойств уравнений Лагранжа.

§ 5. Другие виды дифференциальных уравнений движения задачи многих тел

1. Прямоугольные декартовские координаты (абсолютные или относительные) в ряде случаев оказываются по тем или иным причинам неудобными для применения в некоторых конкретных задачах небесной механики и тогда их заменяют какими-либо другими, более подходящими переменными.

Рассмотрим сначала простейшую, не прямолинейную систему, а именно, систему цилиндрических координат.

Если желательно преобразовать к этой системе координат абсолютные уравнения движения (7.1), или (7.1′), то нужно положить:

$$\xi_i = \rho_i \cos\lambda_i, \quad \eta_i = \rho_i \sin\lambda_i, \quad \zeta_i = \zeta_i, \tag{7.38}$$

где ρ_i есть проекция радиуса-вектора r_i точки M_i на плоскость $O\xi\eta$, а λ_i — угол, образуемый этой проекцией с положительным направлением оси абсцисс (долгота) *).

Тогда (см. § 3 гл. VI) уравнения движения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho}_i - \rho_i\dot{\lambda}_i^2 &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \rho_i}, \\ \frac{d}{dt}(\rho_i^2\dot{\lambda}_i) &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \lambda_i}, \\ \ddot{\zeta}_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \end{aligned}\right\} \tag{7.38′}$$

*) В системе координат (7.38) за основную плоскость взята плоскость $O\xi\eta$ и за основное направление — ось абсцисс. Ясно, что такой выбор не является обязательным и за основную плоскость можно взять любую координатную плоскость.